*

Resultater om sterk og svak kompletthet for den minimale intensjonale predikatlogikken I;0 og for beslektede ikke-klassiske systemer.

*

Morten Rognes

1974

*

Innledning

§0.1 Bakgrunn

Det følgende er et rent teknisk arbeid som behandler en del emner i forbindelse med systemet I;0 som ble beskrevet og studert i Rognes [1]. Det forutsettes her at leseren er fullstendig kjent med innholdet i Rognes [1] og den typen semantikk for intensjonale språk som er utformet der. All notasjon og terminologi som vi vil komme til å benytte i det følgende og som vi ikke eksplisitt definerer kan man finne definert og forklart i den nevnte avhandling. Det må innskjerpes at det følgende er et rent arbeidsutkast som forfatteren med tiden har til hensikt å omarbeide og sette inn i en videre sammenheng. Det må også nevnes at forfatteren i et senere essay vil komme til å gi en nøyere , filosofisk preget, begrunnelse for den semantikken som er utarbeidet og dessuten redegjøre for dens forhold til mer tradisjonelle semantiske teorier for intensjonale språk. Vi nevner dette siden man vil finne lite, eller ingenting om disse spørsmål på de følgende sider og fordi det under arbeidet nødvendigvis har oppstått mange flere spørsmål og problemer enn dem som det har stått i min makt å gi et fyldestgjørende svar på her.

§0.2 Om innholdet

Vårt arbeid er delt i to deler. I den første delen undersøker vi systemet I;0 og en del beslektede systemer og viser for I;0's vedkommende hvordan det fullstendighetsresultatet vi fant i Rognes [1] kan forbedres. Det er tre forskjellige temaer vi har forsøkt å belyse. Hovedtemaet er forskjellen mellom det vi kaller streng og svak kompletthet for et system med hensyn på en bestemt mengde med modeller for systemet. La meg gi en kortfattet redegjørelse for hva det dreier seg om: Vi kan for ethvert av våre systemer S avgrense en klasse med modeller X;S for systemet som det intuitivt sett er svært nærliggende å betrakte. Dessuten er det slik at mengden av alle de formler som er gyldige i ethvert element i X;S inneslutter klassen av teoremer i S. Imidlertid kan vi med letthet vise at det finnes konsistente S-teorier som ikke har noen modell i X;S. Dette faktum utelukker at S kan være det vi kaller strengt komplett med hensyn på modell-klassen X;S. Imidlertid forhindrer ikke dette at S kan være svakt komplett med hensyn på X;S; med andre ord at enhver formel som er gyldig i enhver modell i X;S faktisk er et teorem i S. Imidlertid skaper dette vanskeligheter ved beviset og en nærmere analyse viser at den bevismetoden vi tidligere har brukt for å vise fullstendighet – man kunne kalle den Henkin-bevis metoden – enten må modi-fiseres eller suppleres med noen nye teknikker. Vårt viktigste bidrag består i å vise hvordan disse tekniske hindringene kan overvinnes. I denne forbindelse har vi innført en metode som går ut på å betrakte hva vi kaller "første-ordens korrelatet" L;-1 til et intensjonalt språk L. Vi gjør utstrakt bruk av denne metoden for å løse de problemer som oppstår.

I tillegg til dette hovedtema er det som nevnt to andre temaer i denne avhandlingen som vi har forsøkt å belyse. Det først kan man få en forståelse for når man husker på at innenfor den rammen vi har arbeidet i Rognes [1] er det to mulige måter å behandle det vi har kalt "strenge intensjonale operatorer"på. Dette gir oss to typer av systemer og vi er derfor interessert i å skaffe oss nøyaktig informasjon innvirker på bevis for fullstendighet, muligheten for å spesifisere modeller og brukbarheten av kalkylene.

Det andre temaet har å gjøre med identiteten til hva vi har kalt "intensjoner", de objektene som vi tenker oss at er referanser for uttrykk av typen "μ(F)". I logikken I;0 kunne

man si at vi har gitt vår tilslutning til et ekstremt fintnervet syn på identiteten til intensjonene, et syn som kan virke berettiget om man har i takene slike operatorer som " –tror at –" og "– vet at – ". Imidlertid er det naturlig å spørre om et slik syn på intensjonene er nødvendig, og om hvorfor man ikke innenfor den "semantiske rammen" som ble beskrevet i [1] kan studere andre typer av intensjoner. På dette spørsmålet kan man svare bekreftende og vi har forsøkt å oppnå dypere innsikt ved å studere de to logikkene I;0– og I;0*– . Det er mulig å betrakte utvidelser av disse logikkene med aksiomer og slutningsregler for operatoren μ som gjør det naturlig å se på referansene til uttrykk av typen "μ(F)" som utsagn i en mer tradisjonell betydning av dette ord.

I den andre delen av dette arbeidet betrakter vi forskjellige utvidelser av systemet I;0. Vi er her interessert i å supplere I;0 med en teori om sannhet for intensjoner. Motivene for å gjøre dette, samt en utstrakt teknisk redegjørelse for systemene, foreligger i denne delen. Vi skal imidlertid ikke i denne innledningen komme nøyere inn på resultatene, men henviser leseren til de aktuelle avsnitt uten nærmere kommentarer akkurat her.

§0.3 Oversikt over resultatene i dette arbeidet.

Vi skal nå gi leseren en oversikt over de resultatene vi har kommet til i den første delen av vårt arbeid. Først beskrives de kalkylene som har blitt studert.

(1) Systemet I;0. Dette systemet ble utførlig definert i Kapittel III i Rognes [1] og leseren henvises derfor til dette kapitlet i det nevnte arbeid. I det følgende bruker vi A1 – A20 for å betegne aksiomskjemaene i systemet I;0 slik det er definert i [1].

(2) Systemet I;0*. Aksiomskjemaer i dette systemet er foruten A1 – A15 og A17 – A20 også de følgende to skjemaer:

A16* T;<m,n>(x;1,...,x;m,F) <–> t;<m,n>(x;1,...,x;m,μ(F)) forutsatt at <m,n> er indeksen til en svak intensjonal operator, dvs. at <m,n>êNXN – h.

I det følgende vil vi bruke h for indeksmengden til de strenge intensjonale operatorene.

A21 T;<m,n>(x;1,...,x;m,F) <–> (F & t;<m,n>(x;1,....,x;m,μ(F))) forutsatt at <m,n>êh

Vi bruker "Ax(I;0*,L) for å betegne klassen av I;0*-aksiomene i L. Slutnings-reglene i systemet I;0* er modus ponens og universell generalisering.

(3) Systemet I;0u. Aksiomskjemaer i dette systemet er foruten A1 – A20 også alle formler av typen:

Au (Ey)(T;<m,n>(x;1,.....,x;n,y) forutsatt at <m,n>êNXN

Vi bruker "Ax(I;0u,L)" for å betegne mengden av alle I;0u-aksiomene i L. Slutningsreglene i systemet I;0u er utelukkende modus ponens og universell generalisering.

(4) Systemet I;0– . Aksiomskjemaer i dette systemet er A1 – A17 og A20. Vi bruker "Ax(I;0–,L)" for å betegne mengden av I;0–-aksiomene i L. Slutningsreglene i systemet er utelukkende modus ponens og universell generalisering.

(5) Systemet I;0*– . Aksiomskjemaer i dette systemet er A1 – A15 og A17,A20. Dessuten A16* og A21. På samme måte som ovenfor bruker vi "Ax(I;0*–, L)" for å betegne mengden av I;0*– -aksiomer i L. Slutningsreglene i systemet er modus ponens og universell generalisering.

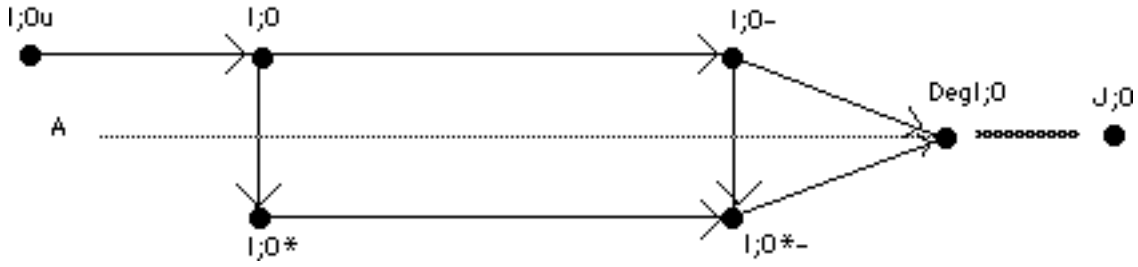
(6) Systemet DegI;0. (Det degenererte I;0-systemet). Aksiomskjemaer i dette systemet er A1 – A15 og A17. I tillegg tar man med:

A16** T;<m,n>(x;1,...,x;m,F) –> t;<m,n>(x;1,....,x;m,F)
forutsatt at <m,n>êNXN

"Ax(DegI;0,L)" betegner klassen av DegI;0-aksiomer i L. Slutningsreglene i systemet er modus ponens og universell generalisering.

Dette avslutter listen over systemer. Inklusjonsforholdene mellom dem kan anskueliggjøres ved hjelp av den følgende figur:

FIGUR I



La oss tilslutt nevne at alle de syntaktiske begrepene vi innførte i Kapittel III i Rognes [1] kan innføres på en helt analog måte for systemene I;0*, I;0–, I;0*–, DegI;0 og I;0u. Hvordan dette kan gjøres skulle leseren lett innse. Vi nevner også at alle hjelpesetningene og teoremene som ble bevist i det nevnte kapittel også kan bevises for systemene I;0*, I;0–, I;0*–, DegI;0 og I;0u.

I Rognes [1] definerte vi for hvert I;0-språk L mengden av modeller Mod;(I;0)(L) og mengden av modeller Mod*;(I;0)(L). Vi bemerker nå de følgende to ting, nemlig:

(A) Er RêMod;(I;0)(L) og <m,n>êh gjelder for alle x;1,....,x;mê|R| at:
f;<m,n>(R)(x;1,....,x;m)Ω X;(R,L) Inkl Tr;L(R)

(B) Er RêMod*;(I;0)(L) så gjelder det at valuasjonen i R, ∏(R), er definert slik at dersom <m,n>êh så har man:
∏(R)(T:<m,n>(t;1,....,t;m,F) = 1 hvis og bare hvis
(i) g(R)(F) êf;<m,n>(R)(R(t;1),...,R(t;m)) & R(F)=1 forutsatt at
T;<m,n>(t;1,....,t;m,F)êCFml(L(R))

A og B følger fra definisjonene av henholdsvis Mod;(I;0)(L) og Mod*;(I;0)(L). Det er dessuten lett å se at dersom RêMod;(I;0)(L) så oppfyller R kravet (i) under B. Man kan derfor oppfatte Mod;(I;0)(L) som en delmengde av Mod*;(I;0)(L).

I det følgende kan det også være nyttig å huske på at:

(C) Er L et I;0-språk uten strenge intensjonale operatorer gjelder:
Mod;(I;0)(L) = Mod*(I;0)(L).

Begrenser vi oss til de språkene der h=ø, dvs. til dem som ikke inneholder strenge intensjonale operatorer er det også lett å se at de systemene som befinner seg over og under linjen A i Figur I faller sammen. Dette innebærer at det blir umulig å skille mellom I;0 og I;0*, og mellom I;0– og I;0*–.

Alle våre resultater her er stort sett fullstendighetsresultater. Den følgende definisjon viser hva som menes med henholdsvis streng og svak kompletthet.

Definisjon 0.31 La L være et I;0-språk og S et av systemene i Figur I (bortsett fra J;0).
(1) S er svakt komplett over L med hensyn på en mengde
X Inkl Mod;(I;0)(L) (eventuelt Mod*;(I:0)(L)) hvis og bare hvis Th(S,L) = Val;L(X).
(2) S er sterkt komplett over L med hensyn på en mengde
X Inkl Mod;(I;0)(L) (eventuelt Mod*;(I:0)(L)) hvis og bare hvis
(i) Th(S,L) Inkl Val;L(X)
(ii) For enhver konsistent S-teori T = ß(Δ,S,L) i L finnes det en RêX slik at R:= T

For å kunne formulere kompletthetsresultatene finner vi det hensiktsmessig å definere hvis klasser av modeller. Vi betrakter først den følgende liste med krav der det forutsettes at R er en modell i Mod;(I;0)(L) eller Mod*;(I;0)(L).

K1 CFml(£(R)) = g(R)"(CFml(L(R))
K2 F,HêCFml(£(R)) & G(R)(F)=G(R)(H) &
Fê*f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;m) –> Hê*f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;m)
K3 G(R)"X;(R,L) Ω G(R)"(CFml(£(R)) – X;(R,L)) =ø
K4 Cor(G(R)Ω (|R|X X;(R,L)))
K5 Cor(G(R))
K6 Er x;1,...,x;mê|R| –> *f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;m)≠ø for alle <m,n>êNXN

La oss kommentere følgende i forbindelse med denne listen: (i) "Cor(x)" brukes som forkortelse for "x er en korrelasjon". (ii) Kravet K5 impliserer kravene K2, K3 og K4. (iii) Vi skal bruke "K1(R,L)", "K2(R,L)" osv. som forkortelse for de uttrykkene som står til høyre for "K1", "K2", osv. på listen ovenfor.

Vi kan nå definere presist de modellmengdene som vi ønsker å ta i betraktning:

Definisjon 0.32 La L være et I;0-språk. Vi setter:
(i) Mod+;(I;0)(L) = Mg (R: K1(R,L)) Ω Mod;(I;0)(L)
(ii) Mod*+;(I;0)(L) = Mg (R: K1(R,L)) Ω Mod*;(I;0)(L)
(iii) Mod;(I;0–)(L) = Mg (R: K2(R,L)) Ω Mod;(I;0)(L)
(iv) Mod;(I;0*–)(L) = Mg (R: K2(R,L)) Ω Mod*;(I;0)(L)
(v) Mod+;(I;0–)(L) = Mg (R: K1(R,L)) Ω Mod;(I;0–)(L)
(vi) Mod+;(I;0*–)(L) = Mg (R: K1(R,L)) Ω Mod;(I;0*–)(L)
(vii) Sem;(I;0)(L) = Mg (R: K3(R,L)& K4(R,L)) Ω Mod;(I;0–)(L)
(viii) Sem;(I;0*)(L) = Mg (R: K3(R,L)& K4(R,L)) Ω Mod;(I;0*–)(L)
(ix) Norm;(I;0)(L) = Mg (R: K5(R,L)) Ω Mod;(I;0)(L)
(x) Norm*;(I;0)(L) = Mg (R: K5(R,L)) Ω Mod*;(I;0)(L)

(xi) Norm+;(I;0)(L) = Mg (R: K1(R,L)) Ω Norm;(I;0)(L)
(xii) Norm*+;(I;0)(L) = Mg (R: K1(R,L)) Ω Norm*;(I;0)(L)
(xiii) Sem;(I;0u)(L) = Mg (R: K6(R,L)) Ω Sem;(I;0)(L)
(xiv) Norm;(I;0u)(L) = Mg (R: K6(R,L)) Ω Norm;(I;0)(L)
(xv) Norm+;(I;0u)(L) = Mg (R: K6(R,L)) Ω Norm+;(I;0)(L)

Vi trenger imidlertid også den følgende definisjon:

Definisjon 0.33 La L være et J;0-språk. Da setter vi
(i) Mod+;(J:0)(L)= Mod;(J;0)(L) Ω Mg(R: K1(R,L))
(ii) Mod*+;(J:0)(L) = Mod*;(J;0)(L) Ω Mg(R: K1(R,L))
(iii) Mod+u;(J;0)(L) = Mg(R: K6(R,L))Ω Mod+;(J;0)(L)
(iv) Mod*+u;(J;0)(L) = Mg(R: K6(R,L))Ω Mod*+;(J;0)(L)

De viktigste resultatene vi skal gi bevis for kan nå oppsummeres i en tabell:

Tabell I

Resultater

	I	II	III	
System	er sterkt komplett over L med hensyn på	er sterkt komplett over L med hensyn på	er svakt, men ikke sterkt komplett over L med hensyn på	
I;0	Sem;(I;0)(L)	Norm;(I;0)(L)	Norm+;(I;0)(L)	l;1
I;0*	Sem;(I;0*)(L)	Norm*;(I;0)(L)	Norm*+;(I;0)(L)	l;2
I;0*–	Mod;(I;0*–)(L)	*	Mod+;(I;0*–)(L)	l;4
I;0–	Mod+;(I;0–)(L)	*	Mod+;(I;0–)(L)	l;3
DegI;0	Mod*;(I;0)(L)	*	Mod*+;(I;0)(L)	l;6
	Mod;(I;0)(L)	*	Mod+;(I;0)(L)	l;5
J;0	Mod;(J;0)(L)	Mod+;(J:0)(L)	Mod+u;(J;0)(L)	l;7
	Mod*;(J;0)(L)	Mod*+;(J:0)(L)	Mod*+u;(J;0)(L)	l;8
I;0u	Sem;(I;0u)(L)	Norm;(I;0u)(L)	Norm+;(I;0u)(L)	l;0

Denne tabellen gir et forholdsvis konsentrert bilde av hva det er vi har oppnådd. Den viser en f.eks. at I;0* er sterkt komplett over L med hensyn på Norm*;(I;0)(L), mens dette systemet bare er svakt og ikke sterkt komplett over L med hensyn på Norm*+;(I;0)(L). (Linje 2, kolonne II, III). I forbindelse med modellen bør man huske på blandt annet dette:

(i) Resultatene som er omgitt av en dobbelt strek er allerede blitt bevist, eller er umiddelbare korollarer, til teoremer i Rognes [1].

(ii) Alle resultatene som er fremstilt i kolonne II og III er fått ved å benytte de tilsvarende resultatene i kolonne I. F.eks. bruker vi det faktum at I;0 er sterkt komplett med hensyn på Sem;(I;0)(L) i beviset for at denne kalkylen er svakt komplett med hensyn på Norm+;(I;0)(L). Likeledes bruker vi det faktum at DegI;0 er sterkt komplett med hensyn på Mod;(I;0)(L) for å vise at DegI;0 er svakt komplett med hensyn på Mod+;(I;0)(L). Det bør også noteres at bevisene for de fleste av disse påstandene er temmelig lange.

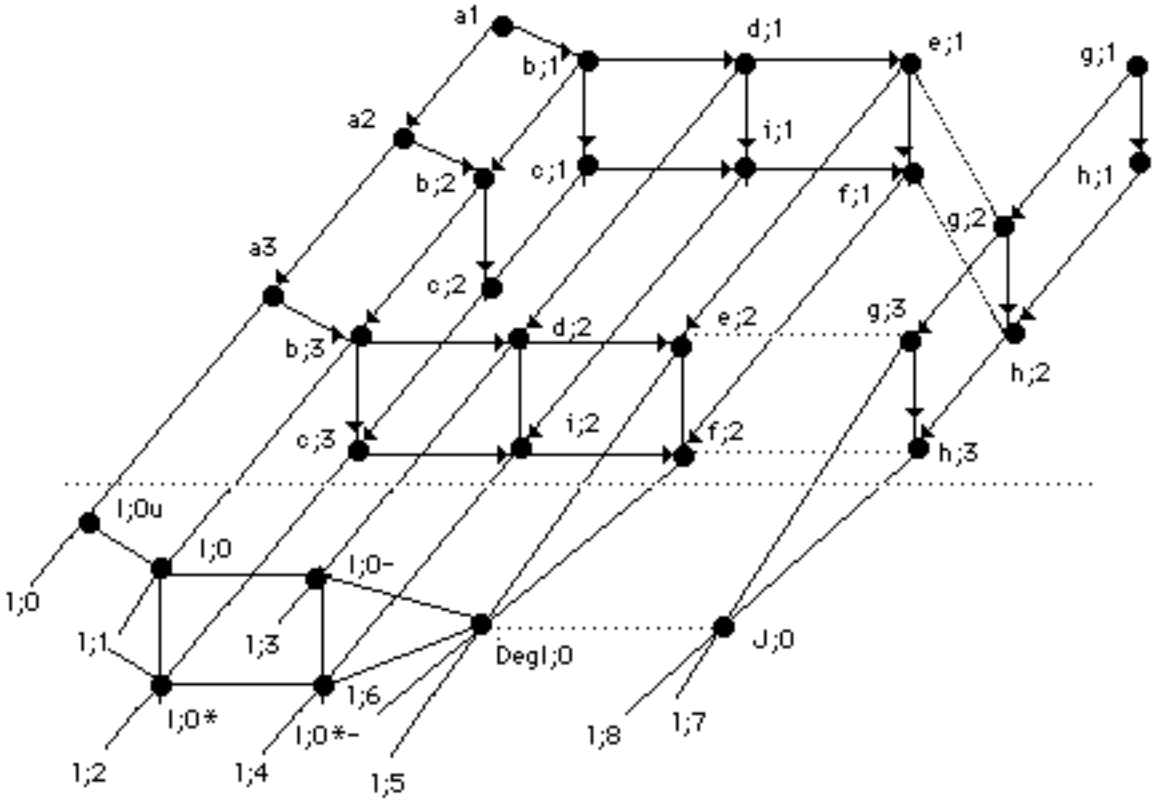
(iii) Teoremene som er representert i kolonne III er alle, uten unntak, korollarer til langt sterkere teoremer som ikke så lett lar seg sammenfatte kort og tabellmessig.

På Figur II på neste side har vi også gitt en oversikt over våre resultater som i tillegg viser hvordan de forskjellige modellklassene er relatert til hverandre. Punktene over linjen A representerer slike mengder. Peker en pil fra et punkt til et annet innebærer dette at modellklassen representert ved det første punktet er inkludert i klassen representert ved det andre punktet. I Tabell I har vi antydet hvilke resultater som svarer til linjene l;0 – l;8.

§0.4 Noen ord om i hvilken rekkefølge resultatene blir bevist.

La oss gi en oversikt over i hvilken rekkefølge resultatene i Tabell I og Figur 2 blir bevist. Vi starter med å bevise at I;0 er svakt komplett over L med hensyn på Norm+;(I;0)(L). I §1 – §4 definerer vi de begrepene vi trenger for å kunne gi dette beviset. Dessuten beviser vi en rekke viktige hjelpesetninger. Et viktig punkt i denne forbindelse er definisjonen av et språk L;-1, "første-ordens korrelatet til L". De hjelpesetningene og den teknikken som blir innført blir brukt i resten av arbeidet. I §5 beviser vi at I;0 er komplett med hensyn på Norm+;(I;0)(L) for I;0-språk som ikke inneholder strenge intensjonale operatorer. I §6 bruker vi metodene i §1 – §4 til å bevise fullstendighetsresultatene sammenfattet i linjene l;7 og l;8 i Tabell I. (Se også Figur II). Det bør understrekes at vi i disse avsnittene beviser adskillig sterkere teoremer enn dem som er antydet ved figurene. I §7 utvider vi resultatene i §5 og viser at I;0 er svakt komplett med hensyn på Norm+;(I;0)(L) for I;0-språk L som også inneholder strenge intensjonale operatorer. I §8 viser vi at I;0 er sterkt komplett med hensyn på Norm;(I;0)(L) og i §9 – §10 beviser vi riktigheten av teoremene diagrammatisk antydet ved hjelp av linjene l;2,l;3 og l;4 i Figur II og Tabell I. §11 er viet bevis for forbedrede versjoner av våre fullstendighetsteoremer for kalkylene I;0[Ç] og I;0[Ç,∑] som vi studerte i Rognes [1]. I §12 gir vi tilslutt bevis for resultatene som er antydet på linje l;5 og l;6 i Tabell I.

FIGUR II



a;1 Norm+;(l;0u)(L)
a;2 Norm;(l;0u)(L)
a;3 Sem;(l;0u)(L)
b;1 Norm+;(l;0)(L)
b;2 Norm;(l;0)(L)
b;3 Sem;(l;0)(L)
c;1 Norm*+;(l;0)(L)
c;2 Norm*;(l;0)(L)
c;3 Sem;(l;0*)(L)
d;1 Mod+;(l;0-)(L)
d;2 Mod+;(l;0-)(L)
i;1 Mod*+;(l;0)(L)
i;2 Mod*;(l;0)(L)

e;1 Mod+;(l;0)(L)
e;2 Mod;(l;0)(L)
f;1 Mod+;(l;0*-)(L)
f;2 Mod;(l;0*-)(L)
g;1 Mod+u;(J;0)(L)
g;2 Mod+;(J;0)(L)
g;3 Mod;(J;0)(L)
h;1 Mod*+u;(J;0)(L)
h;2 Mod*+;(J;0)(L)
h;3 Mod*;(J;0)(L)

Del I

Om sterk og svak kompletthet.

§1 Avgrensning av noen klasser av I;0 og J;0-modeller.

Vi skal forbedre våre kompletthetsteoremer for systemene I;0 og J;0 og analysere noen av de vanskelighetene som oppstår i denne forbindelse. De viktigste resultatene er formulert i §5. Vi arbeider her bare med I;0- og J:0-språk som ikke inneholder funksjonsymboler eller strenge intensjonale operatorer. Strenge intensjonale operatorer vil bli diskutert senere.

La L være et I;0-språk. Med Mod;(I;0)(L) forstår vi klassen av I;0-modeller for L: Med Sem;(I;0)(L) forstår vi klassen av de seminormale I;0-modellene for L, videre er Norm;(I;0)(L) klassen av de normale I;0-modellene for L. Vi har at RêNorm;(I;0)(L) hvis og bare hvis og bare hvis G(R) er en en-entydig funksjon. Med de strengt normale I;0-modellene for L forstår vi de normale I;0-modellene for L som er slik at X;(R,L) = CFml(£(R)), der £(R) betegner det språket som inngår i modellstrukturen til modellen R. Vi betegner klassen av de strengt normale I;0-modellene med Norm+;(I;0)(L). Klassen av de RêNorm+;(I;0)(L) som er slik at f;<m,n>(R)(x;1,...,x;m)≠ø for alle <x;1,...,x;m>ê|R|^m betegnes her med Q;(I;0)(L). Det fremgår fra disse bemerkningene at de følgende inklusjoner holder:

(1) Q;(I;0)(L) Inkl Norm+;(I;0)(L) Inkl Sem;(I;0)(L) Inkl Mod;(I;0)(L)

La L være et J;0-språk. Vi lar Mod+;(J;0)(L) være klassen av de J;0-modeller R for L som er slik at X;(R,L) = CFml(£(R)). Vi betegner med "Q;(J;0)(L)" klassen av de J;0-modellene RêMod+;(J;0)(L) der man har at f;<m,n>(R)(x;1,...,x;m)≠ø for alle <x;1,...,x;m>ê|R|^m. Når det gjelder J;0-modellene har man derfor:

(2) Q;(J;0)(L) Inkl Mod+;(J;0)(L) Inkl Mod;(J;0)(L)

§2 Noen grunnleggende begreper.

La L være et I;0-språk. Anta FêFml(L). I det følgende skal vi anta at "o" er et symbol som ikke opptrer i noe språk. Med «F», matrisen til F, forstår vi resultatet av å erstatte alle forekomster av konstanter og fri variabler i F med symbolet "o". Antallet forekomster av "o" i «F» kalles graden til «F». Vi kaller den første forekomsten av "o" i «F» for det første argumentstedet i «F», den andre forekomsten av "o" for det andre argumentstedet etc. I det følgende bruker vi "a", "b", "c","d", eventuelt påført tall som indekser, som syntaktiske variabler for enkle termer, dvs termer som enten er konstanter eller variabeltegn. Anta FêFml(L) og at «F» er av grad n. Da finnes det en entydig bestemt sekvens av enkle termer [a;1,....,a;n] av lengde n som er slik at dersom a;j settes inn på det j'te argumentstedet i «F» for j=1,...,n får man som resultat F. La [a;1,....,a;n] av n enkle termer. Vi bruker da uttrykket "«F»[a;1,....,a;n]" for å betegne resultatet av å sette inn termen a;j for den j'te forekomsten av "o" i «F». Skriver vi «F»[a;1,....,a;n] forutsetter vi at (i) «F» er av grad n og (ii) at variabeltegn som settes inn for o'er i «F» ikke blir bundet av kvantorer i «F». Man ser umiddelbart at dersom «F» = «G» så er F en substitusjonsinstans av G. Vi definerer en ekvivalensrelasjon "~;m" ved å sette at <F,G>ê ~;m hvis og bare hvis «F» = «G». Vi bruker "[F]~;m" for å betegne ekvivalensklassen til formelen F med hensyn på ekvivalensrelasjonen ~;m.

Det bør bemerkes at alle de begrepene som er innført ovenfor innføres på akkurat samme måte om vi arbeider med J;0-språk.

Det følgende lemma angir noen grunnleggende egenskaper til de begrepene som er innført. Beviset overlates til leseren:

Lemma 2.0 Anta L;1,L;2 er to I;0(J;0)-språk der L;2 er et språk for L;1. Anta g er en L-morfi fra L;1 over i L;2 og at språkene er tellbare. Anta F,G êFml(L;1) og at a;1,...,a;n, b;1,...,b;m er enkle termer i L;1. Da gjelder:

(i) Er «F»[a;1,...,a;n] = «G»[b;1,...,b;m] så har man at «F» = «G», m=n og at a;i=b;i for i=1,...,n.

(ii) Er Cd(Const(L;1)) ≥ Aleph;0 så er Cd([F]~;m) ≥ Aleph;0.

(iii) Cd([Fml(L;1)/ ~;m]) ≥ Aleph;0

(iv) Man har at «g(F)»[g(a;1),....,g(a;n)] = g(«F»[a;1,....,a;n]) og dessuten at «g(F)» = «g(G)» hvis og bare hvis «F»=«G».

§3 Førsteordens språk og strukturer. Spesielle predikater.

Med et første-ordens språk forstås her et J;0-språk hvor vi har utelatt de intensjonale operatorene og funksjonsymbolene. Med en første-ordens struktur for et første-ordens språk L forstår vi det samme som en J;0-modell, unntatt at vi har utelatt f(R), £(R) og <*f*;<m,n>(R)>/<m,n>êNXN i definisjonen av strukturen og klausulene om intensjonale operatorer i definisjonen av ∏(R). Et første-ordens språk inneholder følgelig singulære termer i snever forstand og beskrivelsestermer.

La L være et I;0-språk. Vi skal definere et bestemt første-ordens språk L;-1. Dette er definert ved at L;-1 inneholder nøyaktig de samme ikke-logiske symbolene som L, dvs. nøyaktig de samme n-ære predikatene for n≥1, nøyaktig de samme singulære termene i snever forstand og de samme konstantene som i L. I tillegg inneholder imidlertid L;-1 for hver formel FêFml(L) et predikat P«μ(F)». Dette predikatet er n+1'ært om «F» er av grad n. Videre inneholder L;-1 for hver formel av typen "T;<m,n>(x;1,...,x;m,F)" i L et predikat P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F)». Dette predikatet er m+q'ært om «F» er av grad q. (Det er klart at «T;<m,n>(x;1,...,x;m,F)» er av grad m+q om «F» er av grad q). Vi kaller predikatene av typen P«μ(F)» og P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F)» for *spesielle* predikater i L;-1. Det bør understrekes at de intensjonale predikatkonstantene t;<m,n> (m,nêN) og U er predikater i L;-1. Dermed er L;-1 fullstendig definert.

Vi kaller et par av typen <P«μ(F)», P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F)»> for et spesielt predikatpar av grad q i L;-1 om «F» er av grad q. Vi skal bruke "h" som en variabel for spesielle predikatpar der det ikke kan føre til misforståelser.

Er L et J;0-språk definerer vi L;-1 på samme måte som ovenfor. I dette tilfelle vil imidlertid ikke L;-1 inneholde noen predikater av typen P«μ(F)». Heller ikke vil L;-1 inneholde predikater av typen t;<m,n> eller predikatet U, siden ingen av disse inngår i J;0-språk.

Vi bruker "Spes(L;-1)" som betegnelse på mengden av de spesielle predikatene i L;-1.

§4 Viktige hjelpesetninger.

(A) La L være et I;0-språk. "Exp(L)" betegner da mengden av de velformede uttrykkene i L. Vi skal nå induktivt definere en avbildning
X;w: Exp(L) –> Exp(L;-1) for hvert variabeltegn w i L. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 4.1 Anta L er et I;0-spåk. X;w : Exp(L) –> Exp(L;-1), der w er et variabeltegn i L, er induktivt definert ved de følgende klausuler:

(i) X;w(c) = c om c er en konstant i L

(ii) X;w(s) = s om s er en singulær term i snever forstand i L

(iii) X;w((ix)F) = (ix)X;w(F)

(iv) Er P et -ært predikat i L og t;1,...,t;n termer i L har man:
X;w(P(t;1,...,t;n)) = (Ew;1)....(Ew;n)(P(w;1,....,w;n) &
Q;1(w;1)& ....&Q;n(w;n))
der Q;i(w;i) er P«μ(F)»(w;i,a;1,...,a;n) om t;i = μ(F) og vi har at P«F» er av grad m+1 og dessuten at F = «F»[a;1,....,a;n]. I motsatt fall er Q;i(w;i) den følgende formel: w;i = X;w'(t;i). Vi forutsetter at w;1,....,w;n,w' er de variablene som alfabetisk sett umiddelbart følger etter w.

(v) X:w(¬F) = ¬X;w(F)

(vi) X;w(F–>G) = X;w(F) –> X;w(G)

(vii) X;w((Ax)F) = (Ax)X;w(F)

(viii) X;w(T;<m,n>(t;1,....,t;m,F)) =
(Ew;1)....(Ew;m)(P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F)»(w;1,....,w;m,a;1,....,a;r) &
Q;1(w;1) &....&Q;m(w;m))
der vi har at Q;i(w;i) er P«μ(H)»(w;i, b;1,...,b;q) om t;i= μ(H) i det vi forutsetter at «H» er av grad q og H = «H»[b;1,...,b;q]. Er t;i ikke av formen μ(H) lar vi Q;i(w;i) være w;i = X;w'(t;i). Vi forutsetter at F er av grad r og at F= «F»[a;1,...,a;r]. Videre forutsettes det at w;1,...,w;m, w' kommer umiddelbart etter w i den alfabetiske rekkefølgen av variabeltegnene.

(ix) X;w(x) = x om x er et variabeltegn i L.

Dette avslutter definisjonen av avbildningen X;w.

Lemma 4.1 La L være et I;0-språk. Anta FêFml(L) og at w ikke forekommer i F. Anta têTerm(L) og at w ikke forekommer i t. Anta c er en konstant i L. Da gjelder:

(i) X;w(F;x[c]) = (X;w(F));x[c]

(ii) X;w(t;x[c]) = (X;w(t));x[c]

Denne påstanden bevises ved induksjon på lengden av velformede uttrykk. Vi utelater beviset siden det er av en rent rutinemessig karakter.

La nå L være et I;0-språk og R en I;0-modell for L. Vi skal definere en første-ordens struktur R;-1 som er en struktur for L;-1. Vi gjøre dette ved den følgende definisjon:

Definisjon 4.2 Anta R er en I;0-modell for et I;0-språk L. Da er første-ordens-strukturen R;-1 for L;-1 definert slik:

(i) R;-1(u) = R(u) om u er en konstant, en singulær term i snever forstand eller et n-ært predikat i L (n≥1)

(ii) R;-1(U) = R(U)

(iii) R;-1(t;<m,n>) = R(t;<m,n>)

(iv) R;-1(P«μ(F)») =
Mg(<x,y;1,....,y;n>: x= G(R)(«g(R)(F)»[f(R)(y;1),....f(R)(y;n)])
i det vi antar at matrisen «F» er av grad n

(v) R;-1(P«T;<m,n>(x;1,....,x;m,F)») =

Mg(<x;1,....,x;m,y;1,....y;n>:
«g(R)(F)»[f(R)(y;1),....f(R)(y;n)]ê*f*;<m,n>(R)(x;1,....,x;m))
der det forutsettes at «F» er en matrise av grad n.

Dermed er første-ordens strukturen R;-1 for L;-1 definert. Merk at straks et par av typen <R,L>, der L er et I;0-språk og R en I;0-modell for L, kan betraktes som gitt kan vi anse <L;-1,R;-1> for gitt. Merk at vi ikke trenger noen opplysninger om CFml(£(R)) – X;(R,L) for å kunne konstruere R;-1.

La L være et I;0-språk og R en første-ordens struktur for L;-1. Med R er gitt en mengde med navn N;R som er i en-entydig korrespondanse med elementene i |R|. n(R) står for navngivningsrelasjonen i modellen R. Er xê|R| er altså n(R)(x) navnet på objektet x. Med £;(L;-1,R) forstås språket som er nøyaktig som L unntatt ved at vi har fjernet alle konstantene og erstattet dem med navnene i N;R (disse oppfattes som en særskilt type av konstanter). vi bruker "f;(L;-1,R)" i stedet for n(R). Med g;(L;-1,R) forstår vi L-morfien fra L(R) over i £;(L;-1,R) definert ved at (i) g;(L;-1,R)(u) = u om u er en singulær term i snever forstand eller et predikatsymbol i L(R) og (ii) g(L;-1,R)(c) = n(R)(R(c)) om c enten er et navn eller en konstant i L(R).

Vi definerer så hva som menes med at R er en normal første-ordens struktur for L;-1 slik:

Definisjon 4.3 La L være et I;0-språk og R en første-ordens struktur for L;-1. Vi sier at *R er en normal første-ordens struktur for L;-1* hvis og bare hvis det finnes en korrelasjon W;(L;-1,R) mellom CFml(£;(L;-1,R) og R(U) som er slik at:

(i) R(P«μ(F)») = Mg(<x,y;1,...,y;n> &
x= W;(L;-1,R)(«g;(L;-1,R)(F)»[f;(L;-1,R)(y;1),...,f;(L;-1,R)(y;1)])
i det vi antar at «F» er av grad n

(ii) <x;1,...,x;m,y>êR(t;<m,n>) –> yêR(U)

(iii) <x;1,...,x;m,y;1,...,y;q>êR(P«T;<m,n>(x;1,....,x;m,F)») <–>
<x;1,...,x;m, Y>êR(t;<m,n>) der:
Y = W;(L;-1,R)(«g;(L;-1,R)(F)»[f;(L;-1,R)(y;1),...,f;(L;-1,R)(y;q)])
i det vi forutsetter at «F» er av grad q.

La L være et I;0-språk og R en normal første-ordens struktur for L;–1. Vi skal definere en modell R;-2 som er en strengt normal I;0-modell for L. Vi gjør dette ved å sette:

(i) |R;-2| = |R|

(ii) Vi lar £(R;-2) = £(L;-1,R)

(iii) Siden R er en normal første-ordens struktur for L;-1 finnes det en korrelasjon W;(L;-1,R) slik at (1) – (3) i Definisjon 4.3 holder. Vi velger ut en slik og setter:
G(R;-2) = W;(L;-1,R)

(iv) f(R;-2) = f;(L;-1,R)

(v) g(R;-2) = g;(L;-1,R)

(vi) *f*;<m,n>(R;-2)(x;1,...,x;2) = Mg(F: FêCFml(£;(L;-1,R) &
<W;(L;-1,R)(F),x;1,...,x;m>êR(t;<m,n>))
for alle <x;1,...,x;m>ê|R;-2|^m

(vii) Vi lar *(R;-2) være et eller annet objekt som ikke er med i |R;-2|

(viii) Vi setter R;-2(u) = R(u) om u er et ikke-logisk symbol i L eller om u = t;<m,n> eller U. (Merk at dette er veldefinert.)

Det skulle være klart at R;-2(U) = Rgn(G(R;-2)). Videre skulle det være lett å se at vi har at <x;1,...,x;m,y>êR;-2(t;<m,n>) hvis og bare hvis

y = G(R;-2)(F) & Fê*f*;<m,n>(R;-2)(x;1,...,x;m)

for en eller annen formel F. Dette holder i sin tur hvis og bare hvis det finnes en eller annen formel F der:

y= W;(L;-1,R)(F) & <W;(L;-1,R)(F),x;1,...,x;m>êR(t;<m,n>)

Dette er så ekvivalent med <x;1,...,x;m,y>êR(t;<m,n>). Dette viser at vi er berettiget i å sette R;-2(t;<m,n>) = R(t;<m,n>) og R;-2(U) = R(U).

Det skulle være klart at R;-2 slik vi har definert den er en strengt normal I;0-modell for L siden vi har at G(R;-2) er en en-entydig funksjon og at X;(R;-2,L) = CFml(£(R;-2)).

Vi har nå definert de viktigste begrepene vi trenger.

Lemma 4.2 La L være et I;0-språk og R en I;0-modell for L. Anta FêCFml(L(R)) og at têCTerm(L(R)) og at t ikke er noen term av typen μ(F). Anta variabeltegnet w ikke forekommer i F eller t. Da gjelder:

(a) R(F) = R;-1(X;w(F))

(b) R(t) = R;-1(X;w(t)).

Bevis: Vi beviser satsen ved induksjon på lengden av velformede uttrykk. Er t en konstant eller en singulær term i snever forstand er satsen triviell.

(i) Anta t = (ix)F. Vi har at følgende holder om aê|R|:

(1) (Ai)(R(F;x[i]) = T <–> R(i) =a)
<–> (Ai)(R;-1(X;w(F;x[i])) =1 <–> R;-1(i) = a)
<–> (Ai)(R;-1((X;w(F));x[i]) =1 <–> R;-1(i) =a)

Dette holder i kraft av Lemma 4.1, induksjonshypotesen og det faktum at R;-1(i) = R(i). Ved hjelp av (1) og definisjonen av X:w følger så umiddelbart R((ix)F) = R;-1(X;w((ix)F)).

(ii) Anta F= P(t;1,....,t;n). Da har man at

(1) R(P(t;1,...,t;n)) = 1 <–> <R;-1(X;w(t;1)),...,R;-1(X;w(t;n))>êR;-1(P)

ved hjelp av induksjonshypotesen og definisjonen av R;-1. På den annen side har man:

(2) R;-1(X;w(P(t;1,...,t;n))) =1 <–>
R;-1((Ew;1)....(Ew;n)(P(w;1,....,w;n) & Konj/i,1,n/(Q;i(w;i)))=1

Høyre side i (2) holder i sin tur hvis og bare hvis det finnes a;1,....,a;n der man har: <a;1,....,a;n>êR;-1(P) & Konj/i,1,n/(R;-1(Q;i(n(a;i)))). Her er n(a;i) navnet på objektet a;i.

Anta nå at i er et vilkårlig tall der 1≤i ≤n. Vi sondrer mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): t;i = μ(F). Da har vi at «F» er av grad q for noe q≥0 og vi har at det må finnes en sekvens av enkle termer [b;1,...,b;q] slik at «F»[b;1,...,b;q] = F. Denne sekvensen av enkle termer er entydig bestemt. I dette tilfellet har man:

(3) R;-1(Q;i(n(a;i))) = 1 <–> R;-1(P«μ(F)»(n(a;i),b;1,...,b;q)) =1
<–> a;i = G(R)(«g(F)»[f(R)(y;1),.....,f(R)(y;q)])

der y;s = R;-1(b;s)=R(b;s) for s=1,...,q. Dette er tilfelle siden b;1,...,b;q må være konstanter siden F er en lukket formel. Ved hjelp av Lemma 2.0 har man imidlertid at

«g(R)(F)»[f(R)(y;1),...,f(R)(y;q)] = «g(R)(F)»[g(R)(b;1),....,g(R)(b;q)]
= g(R)(«F»[b;1,....,b;q]) = G(R)(F).

I lys av (3) har man da at R;-1(Q;i(n(a;i))) = 1 <–> a;i = R(μ(F)) = R(t;i)

Tilfelle (ii): t;i er ikke av formen μ(F). Da har man at R;-1(Q;i(t;i)) = 1 <–> a;i = R;-1(X;w'(t;i)) <–> a;i = R(t;i) ved hjelp av induksjons-hypotesen.

I begge tilfellene har vi R;-1(Q;i(n(a;i))) =1 hvis og bare hvis a;i = R(t;i) for i=1,...,n. Dette viser at høyre side i (1) og (2) er ekvivalente. Det følger derfor at R(P(t;1,...,t;n)) = R;-1(X;w(P(t;1,...,t;n))).

Tilfellene der F =(¬G) og F = (G–>H) er likefremme og overlates til leseren.

(iv) Anta F = (Ax)G. La N(R) være navnene på elementene i |R|. Da har man:

R((Ax)F) = T <–> (Ai)(iêN(R) –> R(F;x[i]) = 1)
<–> (Ai)(iêN(R) –> R;-1(X;w(F;x[i])) =1) (IH)
<–> (Ai)(iêN(R) –> R;-1(X;w(F);x[i]) =1) (Lemma 4.1)
<–> R;-1((Ax)(X;w(F))) = 1
<–> R;-1(X;w((Ax)F)) =1

(v) Anta F = T;<m,n>(t;1,...,t;m,G). Da har man:

(1) R(T;<m.n>(t;1,...,t;m,G)) = 1 <–>
g(R)(G) ê*f*;<m,n>(R)(R(t;1),...,R(t;m))

På den annen side har man, i det vi antar at «G» er av grad r, G = «G»[b;1,...,b;r] og R;-1(b;k) = R(b;k) = z;k ê|R| for k=1,...,r, at:

(2) R;-1(X;w(T;<m.n>(t;1,...,t;m,G))) = 1 <–>
(Ew;1)....(Ew;m)(<w;1,...,w;m,R;-1(b;1),...,R;-1(b;r)>ê
R;-1(P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F)») & Konj/i,1,m/R;-1(Q;i(n(w;i)))

I lys av definisjonen av R;-1 har man at dette er ekvivalent med:

(Ew;1)...(Ew;n)(«g(R)(G)[f(R)(z;1),....,f(R)(z;r)]ê *f*;<m,n>(R)(w;1,....,w;n) &
Konj/i,1,m/R;-1(Q;i(n(w;i)))

Men i lys av Lemma 2.0 er dette ekvivalent med:

(Ew;1)...(E;w;n)(g(R)(G)ê*f*;<m,n>(R)(w;1,....,w;n) &Konj/i,1,m/R;-1(Q;i(n(w;i)))

På samme måte som under (ii) ovenfor ser man at dette er ekvivalent med høyre side i (1). Vi har derfor:

R(T;<m,n>(x;1,...,x;m,G)) = R;-1(X;w(T;<m,n>(x;1,...,x;m,G)))

som er det vi ønsker. Dette avslutter beviset for Lemma 4.2. **Q.E.D.**

Vi trenger også den følgende sats:

Lemma 4.3 La L være et I;0-språk. La R være en normal første-ordens struktur for L;-1. Anta FêCFml(L(R)) og at têCTerm(L(R)) og anta at t ikke har formen μ(F) for en eller annen formel F. Anta w er et variabeltegn som ikke forekommer i F eller t. Da gjelder:

(i) R;-2(F) = R(X;w(F))
(ii)) R;-2(t) = R(X;w(t))

Bevis: Beviset er ved induksjon på lengden av velformede uttrykk i L. Er t en konstant eller en singulær term i snever forstand er påstanden opplagt.

(i) Anta t = (ix)F. Da har man om aê|R|:

(1) (Ai)(R;-2(F;x[i]) =1 <–> R;-2(i) =a) <–>
(Ai)(R(X;w(F;x[i])) =1 <–> R(i) =a) <–>
(Ai)(R((X;w(F);x[i]) =1 <–> R(i) =a.

Dette holder i kraft av Lemma 4.1, induksjonshypotesen og det faktum at R;-2(i) = R(i) om i er et navn. (Vi bruker de samme navnene i R;-2 og R). Ved hjelp av (1) og definisjonen av ;w følger så umiddelbart:

R;-2((ix)F) = R(X;w((ix)F))

(ii) Anta F= P(t;1,...,t;n). Da har man for det første:

(1) R;-2(P(t;1,...,t;n)) =1 <–> <R;-2(t;1),....,R;-2(t;)>êR;-2(P)

På den annen side har vi:

(2) R(X;w(P(t;1,...,t;n)))=1 <–>
R((Ew;1)....(Ew;n)(P(w;1,...,w;n) & Konj/i,1,n/(Q;i(w;i)))=1 <–>
(Ec;1)....(Ec;n)(<c;1,...,c;n>êR(P) & Konj/i,1,n/(R(Q;i(n(c;i))))=1)

La i være et vilkårlig element i {1,...,n}. Vi sondrer mellom to tilfelle: (a) t;i = μ(F) for noe formel F i CFml(L(R)). Da har vi at Q;i(n(c;i)) er P«μ(F)»[n(c;i),b;1,...,b;s] i det vi antar at «F» er av grad s, b;1,...,b;s enkle termer og F =«F»[b;1,...,b;s]. Vi har i dette tilfellet at:

R(Q;i(n(c;i)) =1 <–> <c;i, R(b;1),...,R(b;s)>ê R(P«F»)
<–> W;(L:-1,R)(«g;(L;-1,R)(F)»[f;(L;-1,R)(R(b;1)),....,f;(L;-1,R)(R(b;s))]) = c;i
<–> G(R;-2)(«g;(L;-1,R)(F)»[g(R;-2)(b;1),....,g(R;-2)(b;s)]) = c;i
<–> G(R;-2)(g(R;-2)(F)) = c;i <–> c;i = R;-2(μ(F)) = R;-2(t;i)

(b) Anta t;i ikke er μ(F) for noen formel F. Da har man (i lys av definisjonen av X;w) at Q;i(n(c;i)) er formelen n(c;i) = X;w'(t;i). Det følger i så fall ved hjelp av induksjonshypotesen at

R(Q;i(n(c;i))) =1 <–> c;i = R(X;w'(t;i)) <–> c;i = R;-2(t;i)

Vi ser at høyre side i (1) og (2) er ekvivalente og at man derfor har:

R;-2(P(t;1,...,t;n)) = R(X;w(P(t;1,....,t;n)))

(iii) Tilfellene F= (¬G) og F =(G–>H) er trivielle og overlates til leseren. Tilfellet F = (Ax)G er i det vesentlige av samme type som tilfelle (iv) i beviset for Lemma 4.2. Også her overlater vi detaljene til leseren.

(vi) Anta F = T;<m,n>(t;1,...,t;m,F). Da finnes k slik at «F» er av grad k og konstanter/navn d;1,...,d;k slik at:

(1) F = «F»[d;1,...,d;k] Vi har:
(2) R;–2(T;<m,n>(t;1,...,t;m,F) =1 <–>
g(R;–2)(F) ê*f*;<m,n>(R;-2)(R;-2(t;1),....,R;-2(t;m) <–>
g(R;-2)(«F»[d;1,...,d;k])ê*f*;>m,n>(R;-2)(R;-2(t;1),....,R;-2(t;m) <–>
«g(R;-2)(F)»[g(R;-2)(d;1),....,g(R;-2)(d;1)]ê*f*;<m,n>(R;-2)(R;-2(t;1),....,R;-2(t;m)
<–> «g(R;-2)(F)»[f;(L;-1,R)(d;1),....,f;(L;-1,R)(d;1)]ê C' der
C' = *f*;<m,n>(R;-2)(R;-2(t;1),....,R;-2(t;m). Dette holder i sin tur hvis og bare hvis man har:
<C, R;-2(t;1),...,R;-2(t;m)>êR(t;<m,n>) der
C = W;(L;–1,R)(«g;(L;-1,R)(F)»[f;(L;-1,R)(R(d;1)),....,f;(L;-1,R)(R(d;k))])

Nå har man på den annen side at:

(3) R(X;w(T;<m,n>(t;1,...,t;m,F)) = 1 <–>
R[(Ew;1)....(Ew;m)(P«T;<m,n>(x;1,....,x;m,F»[w;1,...,w;m,d;1,....,d;k] &
Konj/i,1,m/(Q;i(w;i))] =1

Dette er så i sin tur tilfelle hvis og bare hvis

(Ew;1)....(Ew;m)(Konj(i,1,m/(w;iê|R]) &
R(P«T;<m,n>(x;1,....,x;mF»[w;1,...,w;m,d;1,....,d;k])=1 &
Konj/i,1,m/(R(Q;i(n(w;i))) =1))

Nå har vi videre at:

(4) R(P«T;<m,n>(x;1,....,x;m,F»[w;1,...,w;m,d;1,....,d;k])=1 hvis og bare hvis <w;1,.....,w;m,R(d;1),...,R(d;k)>êR(P«T;<m,n>(x;1,....,x;mF»)

Dette holder i sin tur hvis og bare hvis: <C, w;1,...,w;m>êR(t;<m,n>) der
C = W;(L;–1,R)(g;(L;-1,R)(F)[f;(L;-1,R)(R(d;1)),....,f;(L;-1,R)(R(d;k))])

Videre kan vi som under punkt (iii) vise at

(5) R(Q;i(n(w;i))) =1 <–> w;i = R;-2(t;i) for i=1,...,m

(4) og (5) impliserer at høyre side i (2) og (3) er ekvivalente. Vi har derfor:

R;-2(T;<m,n>(t;1,...,t;m,F)) = R(X;w(T;<m,n>(t;1,...,t;m,F))) som nettopp er det vi ønsker. Dette avslutter beviset for Lemma 4.3. **Q.E.D.**

(B) I dette avsnittet er de intensjonale språkene vi skal arbeide med J;0-språk. Vi skal definere induktivt en avbildning X fra Exp(L) inn i Exp(L;-1) der L er et J;0-språk. Dette gjøres ved den følgende definisjon:

Definisjon 4.4 Anta L er et J;0-spåk. X : Exp(L) –> Exp(L;-1) er induktivt definert ved de følgende klausuler:

(i) X(c) = c om c er en konstant i L
(ii) X(s) = s om s er en singulær term i snever forstand i L
(iii) X(y) = y om y er et variabeltegn i L
(iv) X((ix)F) = (ix)X(F)
(v) X(P(t;1,...,t;n)) = P(X(t;1),...,x(t;n)) om P er et n-ært predikat i L
(vi) X(¬F) = ¬X(F)
(vii) X(F–>G) = (X(F) –> X(G))
(viii) X((Ax)F) = (Ax) X(F)
(ix) Er F = T;<m,n>(t;1,....,t;m,G) der «G» er av grad n og man har at G = «G»[b;1,...,b;n] setter vi:
X(T;<m,n>(t;1,...,t;m,G)) =
P«T;<m,n>(t;1,....,t;m,G)»[X(t;1),...,X(t;n),b;1,...,b;n]

Dermed er avbildningen X fullstendig definert.

La L være et J;0-språk og R en J;0-modell for L. Vi skal definere en første-ordens struktur R;-1 for L;-1. Vi gjør dette ved å sette R;-1(u) = R(u) om u er et predikat, en singulær term i snever forstand eller en konstant i L. Videre setter vi:

R;-1(P«T;<m,n>(x;1,....,x;m,F)») =
Mg(<x;1,...,x;m,y;1,...,y;n>: «g(R)(F)»[f(R)(y;1),....,f(R)(y;n)]ê
f;<m,n>(R)(x;1,....,x;m))

I det vi forutsetter at «F» er av grad n. Dette avslutter definisjonen av R;-1.

La på den annen side en første-ordens struktur R for L;-1 være gitt der L er et J;0-språk. Vi skal definere en J;0-modell R;-2 for L. Vi gjør dette ved å sette:

(i) |R;-2| = |R|
(ii) *(R;-2) = *(R)
(iii) £(R;-2) = £(L;-1,R)
(iv) g(R;-2) = g;(L;-1,R) og f(R;-2) = f;(L;-1,R)
(v) *f*;<m,n>(R;-2) er definert ved at man setter
Fê*f*;<m,n>(R;-2)(x;1,...,x;m) hvis og bare hvis det finnes en GêFm(L) der G er av grad n og y;1,....,y;nê|R;-2| slik at:
(a) F = «g(R;-2)(G)»[f(R;-2)(y;1),...,f(R;-2)(y;n)] og der man dessuten har at:
(b) <x;1,...,x;m,y;1,...,y;n>êR(P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,G)»)
(vi) R;-2(u) = R(u) om u er et predikat, en singulær term i snever forstand eller en konstant i L.

Dermed er R;-2 fullstendig definert.

Vi kan nå bevise de følgende hjelpesetninger som i en viss forstand svarer til Lemma 4.1 – Lemma 4.3.

Lemma 4.4 La L være et J;0-språk. Anta FêFml(L) og at têTerm(L). Anta c er en konstant i L. Da gjelder:

(i) X(F;x[c]) = (X(F));x[c]

(ii) X(t;x[c]) = (X(t));x[c]

Beviset er et induksjonsbevis på lengden av velformede uttrykk.

Lemma 4.5 La L være et J;0-språk og R en J;0-modell for L. Anta FêCFml(L(R)) og at têCTerm(L(R)). Da gjelder:

(a) R(F) = R;-1(X;w(F))

(b) R(t) = R;-1(X;w(t)).

Også her utelater vi beviset som er et rutinemessig induksjonsbevis på lengden av velformede uttrykk.

Lemma 4.6 La L være et J;0-språk. La R være en første-ordens struktur for L;-1. Anta FêCFml(L(R)) og at têCTerm(L(R)). Da gjelder:

(i) R;-2(F) = R(X;w(F))

(ii)) R;-2(t) = R(X;w(t))

Også i forbindelse med denne satsen overlater vi det detaljerte beviset til leseren. Det bør bemerkes at bevisene for Lemma 4.4 – Lemma 4.6 ligner svært på bevisene for Lemma 4.1 – Lemma 4.3.

§4.1 Om funksjonssymboler.

Vi har forutsatt at funksjonsymboler ikke er med i våre I;0- eller J;0-språk. Imidlertid kan vi ta dem med, men vi må da føye til den følgende klausul i definisjonen av X;w ovenfor:

X;w(f(t;1,...,t;n)) = (iz)((Ew;1)....(Ew;n)(z = f(w;1,....,w;n) &
Q;1(w;1)&....&Q;n(w;n))

der vi forutsetter at Q;i(w;i) ($1 \leq i \leq n$) er formelen w;i = X;w(t;i) om t;i≠μ(F) for alle FêFml(L) og der vi setter at Q;i(w;i) er P«μ(F)»(w;i,a;1,...,a;m) om t;i=μ(F) og Grad(«F») = m og vi dessuten har at F =«F»[a;1,....,a;n]. Vi forutsetter her at z,w;1,...,w;n er variabler som kommer etter w i den alfabetiske ordningen av variabeltegnene.

Det kan bemerkes at Lemma 4.2 og Lemma 4.3 også holder om vi tar med fumksjonsymboler i L. Bevisene for disse satsene må imidlertid utvides i det vi må vise at satsene også holder i det tilfelle at t=f(t;1,...,t;n) der f er et n-ært funksjonssymbol. La oss vise hvordan induksjonstrinnet for funksjonssymboler blir i beviset for Lemma 4.2:

Vi skal vise R(f(t;1,...,t;n) = R;-1(X;w(f(t;1,...,t;n)). Det er hensiktsmessig å skille mellom to tilfeller:

Tilfelle (i): Anta (0) R(t;k) =* for noe kê{1,...,n}. Da har man:

(1) R(f(t;1,...,t;n))=*.

Videre har man om man antar at

R;-1(X;w(f(t;1,...,t;n)))ê|R;-1| at det finnes et og bare et navn i slik at:

(2) R;-1((Ew;1)....(E;w;n)(i = f(w;1,...,w;n) &

Q;1(w;1)&....&Q;n(w;n))) = 1

Dette innbærer at det finnes a;1,...,a;nê|R;-1| slik at

R;-1(i= f(ñ(a;1),....,ñ(a;n) & Q;1(ñ(a;1) &.... & Q;n(ñ(a;n))) = 1. Herav:

(3) R;-1(Q;i(ñ(a;i))) =1 for i=1,...,n.

Vi må ha at t;k≠μ(F) fordi R(μ(F))ê|R|=|R;-1|. Derfor har man fra (3) at R;-1(ñ(a;i) = X;w(t;i)) = 1 for i=1,...,n. Dette innebærer imidlertid at a;k = R;-1(X;w(t;k)) = R(t;k) = * i lys av induksjonshypotesen. Men dette er absurd. Det er derfor galt at R;-1(X;w(f(t;1,...,t;n)))ê[R;-1|. Men da må man ha:

R;-1(X;w(f(t;1,...,t;n))) = * = R(f(t;1,...,t;n))

Tilfelle (ii): R(t;i)ê|R| for alle iê{1,...,n}. Da har man:

(4) R(f(t;1,...,t;n)) = R(f)(R(t;1),...,R(t;n)) = a for noe aê|R|. Man må ha at det finnes z;1,...,z;nê|R| slik at

(5) R(t;i)= z;i for i=1,...,n

I lys av induksjonshypotesen har man:

(6) R(t;i) = R;-1(X;w(t;i)) for de i der man har t;i≠μ(F) for enhver FêCFml(L(R)). Dette innebærer at man har:

(7) R;-1(ñ(z;i) = X;w(t;i)) = 1 for slike i.

Er t;i= μ(F) for en eller annen FêCFml(L(R)) er det lett å se at man har:

R(t;i) = z;i <–> R;-1(Q;i(ñ(z;i))) =1.

Man har derfor for alle iê{1,...,n} at R(t;i) = z;i <–> R;-1(Q;i(ñ(z;i))) =1. Ved hjelp av dette er det lett å se at (2) bare kan holde for nøyaktig et navn i, nemlig ñ(a). Vi har derfor:

R;-1(X;w(f(t;1,....,t;n))) = a = R(f(t;1,...,t;n)) som nettopp er det vi ønsker.

§5 Bevis for et hovedteorem. Resultater om sterk og svak kompletthet for systemet I:0.

Vi kommer nå til vårt egentlige anliggende i dette arbeidet, i det vi skal gi bevis for den følgende sats:

Teorem 5.1 (Hovedteorem) La L være et I;0-språk. Anta Δ Inkl Fml(L). La h være et spesielt predikatpar av grad ≥1. Anta for hver formel FêΔ at X;w(F), der w er et variabeltegn som ikke forekommer i F, bare inneholder spesielle predikater som er med i Spes(L;-1) – {(h);0, (h;1)}. La T = ß(Δ,I;0,L) være en konsistent I;0-teori i L. Da gjelder:

(ER)(RêNorm+;(I;0)(L) & R := T).

Bevis: Siden T = ß(Δ,I;0,L) er en konsistent I;0-teori i L, følger det fra fullstendighetsbeviset for I;0 ,som ble gitt i Rognes [1], at det finnes en tellbar seminormal I;0-modell R for L slik at (1) R:= T. Mer spesielt har man da

(2) R:= Δ. Siden <R,L> er gitt er også paret <R;-1,L;-1> bestemt. Vi skal modifisere R;-1 til en første-ordens struktur R* for L;-1 slik at R* er en *normal* første-ordens struktur for L;-1.

Vi begynner nå definisjonen av R*. Vi setter:

(3) R*(u) = R;-1(u) om u er et n-ært predikat i L (n≥1), en singulær term i snever forstand eller en konstant i L

(4) |R*| = |R;-1|

(5) *(R*) = *(R;-1)

(6) R*(U) = R;-1(U) & R*(t;<m,n>) = R;-1(t;<m,>)

Man legger også merke til at £;(L;-1,R*), f;(L:-1,R*) og g;(L;-1,R*) nå er fullstendig fiksert.

For å fullføre konstruksjonen av R* er det imidlertid nødvendig å si hva R*(u) skal være når u er et spesielt predikat i L;-1.

Vi skal definere en korrelasjon mellom CFml(£;(L;-1,R*)) og R*(U). Mengden av spesielle predikater i L;-1 av typen P«F» betegner vi med Spes;1(L;-1). Anta QêSpes;1(L;-1). Vi skal definere en relasjon W(Q). Man må ha at Q = P«μG» for noen GêFml(L) og at G er av grad n for noe n≥0. Vi setter at

<x, «g;(L;-1,R*)(G)»[f;(L;-1,R*)(y;1),....,f;(L;-1,R*)(y;n)]> êW(Q) hvis og bare hvis <x,y;1,...,y;n>êR;-1(Q) for alle x,y;1,...,y;nê|R;-1|. Dermed er W(Q) definert. La K være Spes;1(L;-1) – {(h);0}. Vi definerer da W* ved:

W* = UN/QêK/(W(Q))

Vi skal nå vise:

(7) W* er en korrelasjon.

(8) Cd(CFml(£;(L;-1,R*))– Dom(W*)) = Aleph;0

(9) Cd[Rgn(G(R)Ω (|R|XX;(R,L)) – Rgn(W*)] = Aleph;0

Fra fullstendighetsbeviset for I;0 går det helt klart frem at man kan anta følgende:

(10) X;(R,L) = CFml(£;(L;-1,R*))

(11) f;(L;-1,R*) = f(R) og

(12) g(R) = g;(L;-1,R*).

Dette er fordi vi har at |R*| = |R;-1| = |R|.

Anta nå at <x,y>êW* for vilkårlige x,y. Da finnes det QêK slik at <x,y>êW(Q). Siden QêK har vi at Q= P«μG» for en eller annen formel GêFml(L) og der vi kan anta at G er av grad n for noe n≥0. Siden <x,y>êW(Q) har vi i lys av definisjonen av "W(Q)" at det må finnes z;1,...,z;n slik at:

(13) y = «g;(L;-1,R*)(G)»[f;(L;-1,R*)(z;1),....,f;(L;-1,R*)(z;n)]
= «g;(R)(G)»[f;(R)(z;1),....,f;(R)(z;n)] (Jmf. (11) og (12))

og der vi dessuten har:

(14) <x,z;1,....,z;n>êR;-1(P«μ(G)»)

Fra (14) og definisjonen av R;-1 følger at

x= G(R)(«g;(R)(G)»[f;(R)(z;1),....,f;(R)(z;n)])

Dette og (13) gir oss x= G(R)(y) og derfor at <y,x>êG(R). Nå har man at yêCFml(£;(L;-1,R*) = X;(R,L) (Jmf. (10)) og derfor at <x,y>êG(R)Ω (|R|XX;(R,L). Siden <x,y> var et vilkårlig par i W* følger det at vi har:

W* Inkl G(R)Ω (|R|XX;(R,L)

Siden G(R)Ω (|R|XX;(R,L) er en korrelasjon følger det at W* må være en korrelasjon. Dette gir en et bevis for (7).

Vi må i lys av forutsetningene i satsen ha at (h);0 = P«μ(F)» for en eller annen FêFml(L) der vi kan anta at «F» er av grad n≥1.

La <y;1,...,y;n>ê|R|^n =|R*|^n. Definer "Z(y;1,...,y;n)" ved:

(15) Z(y;1,...,y;n) = «g;(L;-1,R*)(F)»[f;(L;-1,R*)(y;1),....,f;(L;-1,R*)(y;n)]

Da har vi at Z(y;1,...,y;n)êCFml(£;(L;-1,R*)). Anta for reduktio ad absurdum at Z(y;1,...,y;n)êDom(W*). Da har man:

Z(y;1,...,y;n) = «g;(L;-1,R*)(G)»[f;(L;-1,R*)(z;1),....,f;(L;-1,R*)(z;q)] for en eller annen formel GêFml(L) og noe naturlig tall q der G er av grad q og hvor P«μ(G)»êK. Dette og (15) impliserer i lys av Lemma 2.0 at

«g;(L;-1,R*)(F)» = «g;(L;-1,R*)(G)» og derfor, igjen ved hjelp av Lemma 2.0 at «F» = «G». Men da er P«μ(F)» = P«μ(G)» = (h);0êK. Dette er umulig. Det følger at ¬(Z(y;1,...,y;n)êDom(W*)).

Siden <y;1,...,y;n> var et vilkårlig n-tuple i |R|^n = |R*|^n har vi vist:

(16) Mg(Z(y;1,...,y;n): y;1,..,y;nê|R*|) Inkl CFml(£;(L;-1,R*))– Dom(W*)

Siden Cd(|R*|) = Aleph;0 følger at Cd(Mg(Z(y;1,...,y;n): y;1,..,y;nê|R*|)) = Aleph;0. Men dette og (16) impliserer at (8) holder.

La oss sette p = G(R)Ω (|R|XX;(R,L), Vi viste ovenfor at

(17) W* Inkl p.

Siden Dom(p) = X;(R,L) = CFml(£;(L;-1,R)) og p er en korrelasjon følger fra (7), (8) og (17) at (9) holder. Siden Cd(|R|) = Aleph;0 har vi at

Cd(|R(U)|) = Cd(|R;-1(U)|) = Cd(|R*(U)|) = Aleph;0 fordi det er klart at Cd(R(U)) ≥Aleph;0. Siden

Rgn(G(R)Ω (|R|XX;(R,L)) – Rgn(W*) Inkl (R*(U) – Rgn(W*))

har vi at Cd(R*(U) – Rgn(W*)) = Aleph;0. Dette og (8) inn innebærer at det finnes en korrelasjon mellom R*(U)–Rgn(W*) og CFml(£;(L:-1,R))–Dom(W*). Vi velger ut en slik, og kaller den W+. Da har vi:

Dom(W+) = CFml(£;(L:-1,R))–Dom(W*) og

Rgn(W+) = R*(U)–Rgn(W*)

Vi definerer så W;(L:-1,R*) = W+U W*. Dette må åpenbart være en korrelasjon mellom CFml(£;(L;-1,R*)) og R*(U).

Det er nå mulig å fullføre konstruksjonen av R*. Anta sê(Spes(L;1)– {(h);0,(h);1}). Da setter vi R*(s) = R;-1(s). Nå har vi at h =<P«μ(F)», P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F)»> for en bestemt formel F der vi kan anta at graden til «F» er n≥1. Vi setter

(19) R*(P«μ(F)») = Mg(<x,y;1,...,y;n>:
x = W;(L;-1,R*)(g;(L;-1,R*)(G)»[f;(L;-1,R*)(y;1),....,f;(L;-1,R*)(y;n)]))

og vi setter:

(20) R*(P«T;<m,n>(x;1,....,x;m,F)») =
Mg(<x;1,....,x;m,y;1,...,y;n>: <x;1,....,x;m,XX(y;1,...,y;n)>êR*(t;<m,n>)

der XX(y;1,...,y;n) = W;(L;-1,R*)(g;(L;-1,R*)(G)»[f;(L;-1,R*)(y;1),....,f;(L;-1,R*)(y;n)]). Dermed er R* definert fullstendig. Det er nå nødvendig å verifisere:

(21) R* er en normal første-ordens struktur for L;-1.

Anta sê(Spes(L;-1)–{(h);0,(h);1}). Da er s enten av typen P«μ(F)» eller av typen P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F)».

(a) s = P«μ(F)», der F er av grad n. Da har man:
<x,y;1,...,y;n>êR*(P«μ(F)») <–>
<x,y;1,...,y;n>êR;-1(P«μF») <–>

(22) x = G(R)(«g(F)(R)»[f(R)(y;1),....,f(R)(y;n)].

I lys av definisjonen av W;(L;-1,R) samt (10) og (11) er (22) tilfelle hvis og bare hvis: x = W;(L;-1,R*)(«g;(L;-1,R*(F)»[f(L;-1,R*)(y;1),....,f(L;-1,R*)(y;n)]) som er det vi ønsker.

Vi bemerker at man åpenbart har:

<x;1,....,x;m,y>êR*(t;<m,n>)=R(t;<m,n>) –> yêR(U) = R*(U).

(b) Anta s = P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F)» der F er av grad n. Vi har:

<x;1,...,x;m,y;1,...,y;n>êR*(P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F)») =
R;-1(P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F)»)

hvis og bare hvis «g(F)(R)»[f(R)(y;1),....,f(R)(y;n)]ê*f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;m). I lys av (10) – (12), definisjonen av W;(L;-1,R*) og det faktum at «g(F)(R)»[f(R)(y;1),....,f(R)(y;n)] er med i domenet til W*, ser man at dette er tilfelle hvis og bare hvis

<x;1,...,x;m,G(R)(«g(F)(R)»[f(R)(y;1),....,f(R)(y;n)] >êR(t;<m,n>) <–>

<x;1,...,x;m, ¥(y;1,...,y;n)>êR(t;<m,n>) = R*(t;<m,n>) der

¥(y;1,...,y;n)= W;(L;-1,R*)(«g;(L;-1,R*(F)»[f(L;-1,R*)(y;1),....,f(L;-1,R*)(y;n)]). Dette er det vi ønsker. Dermed har vi godtgjort påstand (21).

Ved et enkelt induksjonsbevis på lengden av velformede uttrykk kan man nå vise den følgende hjelpesetning:

Lemma 5.1.0 Anta FêCFml(L;-1(|R|)) og têCTerm(L;-1(|R|). Anta at F og t, om de inneholder spesielle predikater, bare inneholder spesielle predikater i Spes(L;-1)–{(h);0,(h);1}. Da har vi at følgende gjelder:

(i) R;-1(F) = R*(F)

(ii) R;-1(t) = R*(t)

Induksjonsbeviset er trivielt og overlates til leseren. (Merk at navnene er de samme i R;-1 og R*).

Vi kan nå fullføre beviset for Teorem 5.1: Anta FêΔ. Siden R:= Δ har vi (23) R:= F. La F' være en vilkårlig R-instans av F. Da har man i lys av (23) at R(F')=1. La w være en variabel som ikke forekommer i F'. Ved hjelp av Lemma 4.2 har vi da R;-1(X;w(F'))=1. Etter forutsetningene i satsen må de spesielle predikatene som forekommer i X;w(F') være blandt dem i Spes(L;-1)–{(h);0,(h);1}. Derfor har vi i lys av Lemma 5.1.0 at

(24) R*(X;w(F')) = 1

Siden R* er en normal første-ordens struktur for L;-1 har vi ved hjelp av Lemma 4.3 at (25) R*;-2(F')=1. Men F' var en vilkårlig R-instans av F. Siden man har at F' er en R-instans av F hvis og bare hvis F' er en R*;-2-instans av F fordi |R| = |R*;-2|, følger det at (26) R*;-2:= F. Men F var en vilkårlig formel i Δ. Derfor: (27) R*:-2:= Δ. Nå har vi åpenbart R*;-2 êNorm+;(I;0)(L). Fordi gyldighetsteoremet gjelder med hensyn på Norm+;(I;0)(L) følger det at R*;-2 := T. Dette avslutter beviset for Teorem 5.1. **Q.E.D.**

Korollar 5.2 La L være et I;0-språk. Da gjelder:

Th(I;0,L) = Val;L(Norm+;(I;0)(L)).

Bevis: Vi har allerede bevist Th(I;0,L) Inkl Val;L(Sem;(I;0)(L)). Men nå er Norm+;(I;0)(L) Inkl Sem;(I;0)(L). Det følger derfor at inklusjonen mot høyre holder. Anta F er en lukket formel i L og at ¬(FêTh(I;0,L)). Da har man at T=ß({¬F},I;0,L) er en konsistent I;0-teori. La w være en variabel som ikke forekommer i (¬F) og la h være et spesielt predikatpar som er slik at hverken (h);0 eller (h);1 forekommer i ¬F. Da er forutsetningene i Teorem 5.1 oppfylt for T og det finnes RêNorm+;(I;0)(L) slik at R:= T. Da har man R:= ¬F. Men da følger at ¬(FêVal;L(Norm+;(I;0)(L))). Vi viser dernest at satsen holder generelt. Anta FêVal;L(Norm+;(I;0)(L)). Da har man at F'êVal;L(Norm+;(I;0)(L)) der F' er den universelle lukningen av F. Det følger i så fall at (I;0,L):– F' og derfor ved hjelp av lukningsteoremet at FêTh(I;0,L). **Q.E.D.**

Teoremet ovenfor sier at I;0 er svakt komplett med hensyn på Norm+;(I;0)(L). Det er imidlertid ikke så vanskelig å se at I;0 ikke kan være sterkt komplett med hensyn på Norm+;(I;0)(L). Vi kan bevise den følgende sats som viser at dette er tilfelle:

Korollar 5.2.1 Anta L er et I;0-språk som inneholder en konstant c. Sett per definisjon:

Δ = {U(c)} U {c≠μ(F): FêFml(L)). Sett videre: T;0 = ß(Δ,I;0,L).

Da finnes det ikke noen modell RêNorm+;(I;0)(L) slik at R:= T;0.

Bevis: Anta for reduktio ad absurdum at det finnes en modell RêNorm+;(I;0)(L) der vi har (1) R:= T;0. Da har man at R:= U(c) og derfor at R(c)êR(U). Da finnes det en FêCFml(£(R)) slik at (2) R(c)=G(R)(F). Siden CFml(£(R))= X;(R,L) har vi at FêX;(R,L). La c;1,...,c;n (n≥0) være de konstantene som forekommer i F. La i;1,...,i;n være navnene på

henholdsvis f(R);-1(c;i) for i=1,...,n. Vi kan da finne en formel G i L med y;1,...,y;n som fri variabler slik at g(R)(G;(y;1,...,y;n)[i;1,...,i;n] = F. Dette og (2) impliserer R(e) = G(R)(g(R)(G;(y;1,...,y;n)[i;1,...,i;n])) og derfor:

(3) R(e =μ(G;(y;1,...,y;n)[i;1,...,i;n])=1

Men vi har T;0 :– e≠μ(G) som sammen med (1) gir oss en motsigelse. **Q.E.D.**

Teorien T;0 har altså ingen modell i Norm+;(I;0)(L). Den er imidlertid konsistent siden den har en modell i Sem;(I;0)(L). Det følger at I;0 ikke er sterkt komplett med hensyn på Norm+;(I;0)(L).

Teorien T;0 gir gir oss også et eksempel på at kompakthetsteoremet ikke gjelder for I;0 med hensyn på modellklassen Norm+;(I;0)(L). For er Δ' en endelig delmengde av Δ slik denne er definert i korollaret har vi at T'=ß(Δ',I;0,L) har en strengt normal I;0-modell. La oss kalle en I;0-teori T=ß(Δ,I;0,L) for kompakt med hensyn på en klasse X Inkl Mod;(I;0)(L) hvis og bare hvis vi har at dersom enhver endelig delmengde av Δ' inkl Δ er slik at ß(Δ',I;0,L) har en modell i X så har også T=ß(Δ,I;0,L) en modell i X. Man har altså at T;0 gir en et eksempel på en I;0-teori som ikke er kompakt med hensyn på Norm+;(I;0)(L).

Selv om ikke enhver konsistent I;0-teori har en modell i Norm+;(I;0)(L) kan man spørre om det er mulig å gi noen opplysende karakteristikk av de konsistente I;0-teoriene som har en slik modell. Vårt hovedteorem angir en forholdsvis omfattende mengde av teorier, der aksiommengden på ingen måte behøver å være endelig, som har en modell i Norm+;(I;0)(L). Vi skal straks se på en annen nokså omfangsrik slik klasse av teorier, men som ikke falle sammen med den klassen som er spesifisert i hovedteoremet ovenfor.

La I;0u være I;0 utvidet med aksiomet:

(1) (Ax;1)....(Ax;n)(Ey)(t;<m,n>(x;1,....,x;n,y))

Det er lett å se at I;0u er komplett med hensyn på Sem;(I;0u)(L), dvs. mengden av alle de RêSem;(I;0)(L) som er slik at

(2) (Ax;1)....(Ax;n)(x;1,...,x;nê|R| –> *f*;<m,n>(R)(x;1,....,x;n)≠ø)

siden de modellen vi konstruerte i fullstendighetsbeviset for I;0 har egenskapen (2) om aksiomet (1) er nærværende. Det er også lett å se fra beviset for Teorem 5.1 at om RêSem;(I;0u)(L) så er R*;-2 êQ;(I;0)(L) = Norm+;(I;0u)(L). Vi har derfor at det følgende resultat holder:

Teorem 5.3 La L være et I;0-språk og anta Δ Inkl Fml(L). La h være et spesielt predikatpar i L;-1 av grad ≥1. Anta for hver FêΔ at X;w(F) bare inneholder spesielle predikater som er med i Spes(L;-1) –{(h);0,(h);1}, i det vi forutsetter at variabeltegnet w ikke forekommer i F. Da gjelder om T =ß(Δ,I;0u,L) er en konsistent I;0u-teori i L at (ER)(RêQ;(I;0)(L) & R:= T).

Som en følgesetning har vi:

Korollar 5.3.1 La L være et I;0-språk. Da gjelder: Th(I;0u,L) = Val;L(Q;(I,0)(L)).

Korollaret følger fra Teorem 5.3 på samme måte som Korollar 5.2 følger fra Teorem 5.1.

Ser man på I;0u-teorien T;0u = ß(Δ,I;0u,L) der Δ er definert som i Korollar 5.2.1 er det klart at denne ikke kan ha noen modell i Q;(I;0)(L). Det følger derfor at I;0u ikke kan være strengt komplett med hensyn på Q;(I,0)(L). La oss gjøre minne om at Q;(I;0)(L) er den

samme mengden av modeller som Norm+(I;0u)(L). Dette innebærer at Q;(I;0)(L) er nøyaktig mengden av de strengt normale I;0-modellene for L som oppfyller kravet (2) som ble nevnt rett ovenfor.

La L være et I;0-språk. Med J;0u(L) forstår vi mengden av alle de formler i L som ikke inneholder noen forekomster av "t;<m,n>" eller termer av typen "μ(F)". Med J;0t(L) forstår forstår vi mengden av alle de formlene i L som ikke inneholder symbolet "U" eller noen termer av typen "μ(F)".

Vi skal bevise:

Teorem 5.4 La L være et I;0-språk og Δ Inkl J;0u(L). Anta T =ß(Δ,I;0,L) er en konsistent I;0-teori. Da har vi (ER)(RêNorm+;(I;0)(L) & R:= T).

Merk at Korollar 5.2 ikke følger fra dette teoremet som gir oss et eksempel på nok en forholdsvis omfangsrik klasse av konsistente I;0-teorier som har en modell i Norm+;(I;0)(L). Når vi nevner dette teoremet er det dette som er hensikten.

Bevis: Siden T= ß(Δ,I;0,L) er en konsistent I;0-teori i L har den ifølge kompletthetsteoremet for I;0 en seminormal modell R. Det finnes med andre ord en R der (1) RêSem;(I;0)(L) og (2) R:= T. Da har man åpenbart at (3) R:=Δ. Vi betrakter R;-1. Vi skal modifisere R;-1 til en første-ordens struktur R* som er en normal struktur for L;-1. La Q;Δ være slik at et predikat PêQ;Δ hvis og bare hvis P forekommer i X;w(F) for en eller annen FêΔ der variabeltegnet w ikke forekommer i F. Man ser, siden Δ Inkl J;0u(L) bare inneholder spesielle predikater av formen P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F)». Vi definerer nå R*. Først stipulerer vi at R*(u) = R;-1(u) om u er en singulær term i snever forstand, en konstant eller et predikat i L. Vi setter (4) R*(U) = R;-1(U). Videre setter vi:
(5) R*(s) = R;-1(s) om s er et spesielt predikat av typen P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F)» i L;-1. Videre setter man (6) |R*| = |R;-1| og *(R*) = *(R;-1). (Det vil si at "nullobjektet" er det samme i de to strukturene). Dermed er størrelsene
£;(L;-1,R*), f;(L;-1,R*) og g;(L;-1,R*) entydig bestemt. Man kan anta at R er en tellbar seminormal modell. Da er L et tellbart språk og £;(L;-1,R*) et tellbart språk. Siden man har (7) Cd(CFml(£;(L;-1,R*))) = Cd(|R*|) = Aleph;0 finnes det en korrelasjon W* med CFml(£;(L;-1,R*)) som domene og R*(U) som verdiområde. Vi betegner med "H(m,n)" klassen av alle de spesielle predikatpar
<P«μ(F)», P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F)»> der «F» er av grad q for noe q≥1. Det skulle være klart at H(m,n) er en korrelasjon for alle <m,n>êNXN.

La nå P«μ(F)» være et spesielt predikat i L;-1 der «F» er av grad n. Da definerer vi:

(8) R*(P«μ(F)») = Mg(<x,y;1,...,y;n>:
W*(«g;(L;-1,R*)(F)»[f;(L;-1,R*)(y;1),...., f;(L;-1,R*)(y;n)]) = x)

For å gjøre definisjonen av R* fullstendig gjenstår det nå bare å definere R*(t;<m,n>). Dette gjøres ved at man setter:

(9) <y;1,...,y;m,x> êR*(t;<m,n>) hvis og bare hvis det finnes en hêH(m,n) av grad q ≥0 slik at

(Ew;1)....(Ew;q)(<x,w;1,...,w;q>êR*((h);0) & <y;1,...,y:m,w;1,...w;q>êR*((h);1))

Dermed er første-ordens strukturen R* fullstendig definert. Vi må imidlertid verifisere at R* er en normal første-ordens struktur for L;-1. I denne forbindelse bemerker vi først at det ikke er vanskelig å innse at:

<y;1,...,y;m,x>êR*(t;<m,n>) –> xêR*(U).

Anta at (10) <x;1,...,x;m,y;1,...,y;q>êR*(P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F)») der man har at «F» er av grad q. Da kan vi sette (11) h = <P«μ(F)», P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F)»>. Nå har vi i kraft av (8) at om

z= W*(«g;(L;-1,R*)(F)»[f;(L;-1,R*)(y;1),...., f;(L;-1,R*)(y;q)])

så er <z,y;1,...,y;q>êR*(P«μ(F)»). Fra dette og (9) følger:

(12) <W*(«g;(L;-1,R*)(F)»[f;(L;-1,R*)(y;1),...., f;(L;-1,R*)(y;q)]),x;1,...,x;m> êR*(t;<m,n>)

som er det vi ønsker. Anta på den annen side at (12) gjelder. I følge (9) må det da finnes et spesielt predikatpar h = <P«μ(G)», P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,G)»> av grad k for noe k≥0 slik at for noen w;1,...,w;kê|R*| har man:

(13) <z,w;1,....,w;k>êR*(P«μ(G)») og

(14) <x;1,...,x;m,w;1,...,w;k>ê R*(P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,G)»)

der (15) z = W*(«g;(L;-1,R*)(F)»[f;(L;-1,R*)(y;1),...., f;(L;-1,R*)(y;q)])

Fra (13) følger i lys av (8):

(16) z= W*(«g;(L;-1,R*)(G)»[f;(L;-1,R*)(w;1),...., f;(L;-1,R*)(w;k)])

(15), (16), det faktum at W* er en korrelasjon og det at f;(L;-1,R*) er en korre-lasjon, gir oss ved hjelp av Lemma 2.0 at k=q og y;1 = w;1 ..... y;k= w;k og «G» = «F». I lys av (14) har vi derfor:

<x;1,...,x;m, y;1,...y;q>ê R*(P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F)»)

som er det vi ønsker. Dermed har vi bevist at R* er en normal første-ordens struktur for L;-1.

Vi kan nå bevise ved et likefremt induksjonsbevis på lengden av velformede uttrykk:

(17) Anta F er en lukket formel i L;-1(|R;-1|) som, om den inneholder spesielle predikater, bare inneholder spesielle predikater av typen P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F)» og som ikke inneholder noen predikater av typen t;<m,n>. La t være en lukket term i L;-1(|R;-1|) som oppfyller det samme kravet. Da gjelder:

(i) R;-1(F) = R*(F)

(ii) R;-1(t) = R*(t).

Vi overlater beviset for (17) til leseren. Det er nå mulig å fullføre beviset for Teorem 5.4. La F være en vilkårlig formel i Δ. Siden Δ Inkl J;0u(L) kan F ikke inneholde noen predikater av typen t;<m,n> eller noen termer av typen μ(F). La F' være en vilkårlig R-instans av F. Da må man ha R(F')=1 siden R er en modell for T. La w være et variabeltegn som ikke forekommer i F'. I lys av Lemma 4.2 må man da ha R;-1(X;w(F')) = 1. Siden termer av typen μ(F) eller predikater av typen t;<m,n> ikke forekommer i F kan X;w(F') , hvis den inneholder spesielle predikater, bare inneholde slike predikater som er av typen P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F)». X;w(F') kan heller ikke inneholde predikater av typen t;<m,n>. Det følger derfor ved hjelp av (17) at R*(X;w(F'))=1. Siden R* er en normal første-ordens struktur for L;-1 følger ved hjelp av Lemma 4.3 at R*;-2(F')=1. Vi har altså for alle R-instanser F' av F at R*;-2(F)=1. Men enhver R-instans av F er en R*;-2 -instans av F siden |R*;-2| = |R| og vi bruker de samme navnene i de to strukturene. Derfor R*;-2 := F. Men F var et vilkårlig element i Δ. Det følger da at R*;-2 := Δ. Vi har at R*;-2êNorm+;(I;0)(L) og at gyldighetsteoremet holder for I;0 med hensyn på Norm+;(I;0)(L). Derfor:
(ER)(RêNorm+;(I;0)(L) & R :=T). Det avslutter beviset for Teorem 5,4. **Q.E.D.**

La oss bemerke to ting i forbindelse med teoremet ovenfor.

Selvom man kan vise at enhver konsistent I;0-teori T =ß(Δ,I;0,L) der Δ Inkl J;0u(L) har en strengt normal I;0-modell kan man ikke vise dette om man bare krever at Δ Inkl J;0t(L). La nemlig Δ1 være definert ved:

Δ1 = {(Ey)t;<m,n>(c;1,...,c;m,y)} U Mg(¬T;<m,n>(c;1,...,c;m,F): FêFml(L))
i det vi forutsetter at c;1,...,c;m er visse konstanter i L. Det er da lett å se at
T1=ß(Δ1,I;0,L) ikke kan ha noen modell i Norm+;(I;0)(L).

La Δ2 være Mg(¬T;<m,n>(c;1,...,c;m,F): FêFml(L)) i det vi antar at c;1,...,c;m er konstanter i L. Da er T2 = ß(Δ2,I;0,L) en konsistent I;0u-teori i L siden den har en modell i Sem;(I;0u)(L). Men den har ingen modell i Q;(I;0)(L). Dette er det lett å overbevise seg selv om. Teorem 5.4 er derfor ikke korrekt om "I;0" erstattes med "I;0u" og "Norm+;(I;0)(L)" med "Q;(I;0)(L)" til tross for at
Δ2 Inkl J;0u(L). Man ser også klart hvilke punkter i beviset for Teorem 5.4 det er som ikke lar seg gjennomføre om man forsøker å overføre det til paret
<I;0u, Q;(I;0)(L)>.

§6 Resultater om sterk og svak kompletthet for systemet J:0.

I dette avsnittet skal vi benytte oss av de begrepene og resultatene som det ble gjort rede for i §4, punkt (B). I det følgende betraktes kun J;0-språk. Hovedresultatet i denne paragrafen er det følgende:

Teorem 6.1 La L være et J;0-språk. Da gjelder: Th(J;0,L) = Val;L(Q;(J;0)(L))

Bevis: At Th(J;0,L) Inkl Val;L(Q;(I;0)(L)) har vi allerede bevist. Dette følger fra gyldighetsteoremet for J;0. La oss derfor ta for oss fullstendighetsdelen i Teorem 6.1. Anta F er en lukket formel i L og at T = ß({F},J;0,L) er en konsistent J;0-teori i L. I følge kompletthetsteoremet for J;0 har man da at det finnes en R der
(1) RêMod;(J;0)(L) og som er slik at (2) R:= T. Da har man at (3) R:= F. Vi betrakter <R;-1,L;-1>. Merk at komponentene i dette paret nå er definert som i §4, avsnitt (B). Vi skal først definere en første-ordens struktur R* for L;-1 som er en modifikasjon av R;-1. Dette gjøres på den følgende måte: Sett per definisjon:

(i) *(R*) = *(R;-1) og
(ii) |R*| = |R;-1|

Merk at vi bruker de samme navnene i forbindelse med struktuene R* og R;-1. Sett videre:

(iii) R*(u) = R;-1(u) om u enten er et predikat, en singulær term i snever forstand , eller en konstant i L. La Q1 være mengden av de spesielle predikatene i X(F). Q1 er åpenbart en endelig mengde. Er sêQ1 setter vi

(iv) R*(s) = R;-1(s)

For hvert par <m,p>êNXN velger vi ut en formel GêFml(L) som er slik at
P«T;<m,p>(x;1,...,x;m,G)» ikke er med i Q1. Dette er opplagt mulig siden Q1 er endelig og det er slik at det for hvert <m,p> finnes uendelig mange distinkte predikater av typen P«T;<m,p>(x;1,...,x;m,G)» i L;-1. Vi kaller mengden av alle de predikatene vi har valgt ut på denne måten for Q2. Er nå s et predikat som er med i Spes(L;-1)–(Q1UQ2) fikserer vi R(s) på en vilkårlig måte. Anta sêQ2. Da er s = P«T;<m,p>(x;1,...,x;m,G)» for et eller annet par <m,p> og en eller annen formel G i L. For ethvert m-tuple <x;1,...,x;m>ê|R*|^m kan vi velge ut et n-tuple <y;1,...,y;n> i det vi antar at graden til «G» er n. Vi lar da R*(s) være mengden av alle slike n+m-tupler <x;1,...,x;m,y;1,...,y;n>. Dette er naturligvis vilkårlig. Vi kunne f.eks. la R*(s) = |R*|^(m+n) eller noe annet. Poenget er imidlertid at vi for hvert <x;1,...,x;m>ê|R*|^m må ha et n-tuple <y;1,..,y;n> (minst ett) slik at
<x;1,...,x;m,y;1,...,y;n>êR*(s). Tar man med mer enn dette er det likgyldig for vårt formål). Dermed er R* fullstendig definert.

Den følgende påstand kan nå bevises ved et enkelt induksjonsbevis:

(A) La HêCFml(L;-1(|R;-1|)) og anta at H bare inneholder spesielle predikater som er med i Q1. Anta têCTerm(L;-1(|R;-1|)) og at t også bare inneholder spesielle predikater som er med i Q1. Da gjelder:

(i) R;-1(F) = R*(F)

(ii) R;-1(t) = R*(t)

Vi betrakter nå R*;-2 (slik som definert i §4, (B)). Anta <x;1,...,x;m>ê|R*;-2| og at <m,p>êNXN. Da har vi at det finnes en formel GêFMl(L) slik at P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F)» êQ" Inkl Spes(L;-1). Da har vi at det finnes <y;1,...,y;n>ê|R*|^n =|R*;-2|^n slik at

<x;1,...,x;m,y;1,...,y;n> ê R*(P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F)»)

i det vi antar at «G» er av grad n. Etter definisjonen av R*;-2 har vi da :

«g(R*:-2)(G)»[f(R*;-2)(y;1),....,f(R*;-2)(y;n)êf;<m,p>(R*:-2)(x;1,...,x;m)

og derfor at f;<m,p>(R*:-2)(x;1,...,x;m)≠ø. Dette viser at vi har :

(B) R*;-2ê Q;(J;0)(L).

Vi kan nå fullføre beviset for Teorem 6.1. Siden F er lukket og R:= F i følge (3) har man at R(F)=1. Ved hjelp av Lemma 4.5 har man da R;-1(X(F)) = 1. Dette og (A) gir oss så R*(X(F)) =1 siden X(F) bare kan inneholde de spesielle predikatene som er med i Q1. Dette fremgår av definisjonen av Q1 ovenfor. Men da har vi ved hjelp av Lemma 4.6 at R*;-2(F) =1. Siden F er lukket innebærer dette at R*;-2:= F. Anta ¬((¬F)êTh(J;0,L)). Da har man T=ß({F}, J;0,L) er konsistent. Vi har derfor vist om F er en lukket formel i L at:

¬((¬F)êTh(J;0,L)). –> (ER)(RêQ;(J;0)(L) & R:=F)

Det følger at dersom F er en lukket formel i L gjelder:

¬(FêTh(J;0,L). –> (ER)(RêQ;(J;0)(L) & R:= ¬F) og derfor at

(C) (AR)(RêQ;(J;0)(L) –> R := F). –> FêTh(J;0,L).

Anta nå at F er en vilkårlig formel og at (i) (AR)(RêQ;(J;0)(L) –> R := F). La F' være lukningen av F. Da har man ved hjelp av (i) at (AR)(RêQ;(J;0)(L) –> R := F')
Fra dette og C følger F'êTh(J;0,L). Men da FêTh(J;0,L). **Q.E.D.**

Teorem 6.1 viser at J;0 er svakt komplett med hensyn på modellklassen Q;(J;0)(L). Imidlertid er ikke J;0 sterkt komplett med henyn på Q;(J;0)(L). Det finnes konsistente J;0-teorier som ikke har noen modell i denne klassen. Anta f.eks. at L er et J;0-språk som inneholder konstantene c;1,...,c;m og la Δ' være definert ved

Δ' = Mg(¬T;<m,n>(c;1,...,c;n,F) : FêFml(L))

Da er det lett å vise at T' = ß(Δ',J;0,L) er en konsistent J;0-teori. Men det skulle være klart at den på den annen side ikke kan ha noen modell i Q;(J;0)(L).

§7 Fullstendighetsresultater for I:0 når strenge intensjonale operatorer er med.

I §5 viste vi at I;0 var svakt komplett med hensyn på mengden av de strengt normale I;0-modellene. Imidlertid vidte vi dette for en versjon av I;0-uten strenge intensjonale operatorer. I denne paragrafen skal vi anta at våre I;0-språk inneholder strenge intensjonale operatorer og at de er indeksert på en mengde
E Inkl NXN. Siden I;0-språkene inneholder slike operatorer forutsetter vi at I;0 inneholder aksiomskjemaet T;<m,n>(x;1,...,x;n,F) –> F om <m,n>êE. Vi skal vise at I;0 utvidet slik er komplett med hensyn på mengden av de strengt normale I;0-modellene der vi krever:

(1) f;<m,n>(R)(x;1,....,x;m) Inkl Tr;L(R)

for alle x;1,...,x;mê|R| og <m,n>êE.

Teorem 7.1 La L være et I;0-språk med strenge intensjonale operatorer. La Norm+;(I;0)(L) være klassen av de strengt normale I:0-modellene for L som oppfyller kravet (1) ovenfor. Da gjelder:

Th(I;0,L) = Val;L(Norm+;(I;0)(L)).

Før vi gir beviset for denne påstanden finner vi det hensiktsmessig å definere en del uttrykksmåter for å kunne uttrykke oss på en klar måte.

La L være et I;0-språk. Som nevnt antar vi at I;0-språkene kan inneholde strenge intensjoale operatorer og at disse er indeksert på en viss mengde E som er inkludert i NXN. Anta FêL;-1 der L er et I;0-språk. Da betegner "Spes[F]" mengden av alle de spesielle predikatene som forekommer i formelen F. Anta
c Inkl Spes(L;-1). La H være mengden av alle de spesielle predikatparene i L;-1. Da er k(c) definert ved:

k(c) = Mg(x: (Ey)(<x,y>êH))U Mg(y: (Ex)(<x,y>êH))

Det fremgår fra denne definisjonen at c Inkl k(c). I det følgende skal vi forutsette at hver gang vi skriver "X;w(F)" så er w et variabeltegn som ikke forekommer i F.

Anta c Inkl Spes(L;-1). Vi sier da at en mengde d Inkl Spes(L;-1) er I-underordnet c hvis og bare hvis man har at det finnes en F i L slik at P«µF»êc og d = Spes[X;w(F)]. Vi skriver "<d,c>ê<;I" som forkortelse for " d er I-underordnet c". Vi sier videre at en mengde d Inkl Spes(L;-1) er II-underordnet c, i symboler "<d,c>ê<;II" hvis og bare hvis det finnes en formel F i L der vi har at P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F)»êc og hvor d= Spes[X;w(F)]. Vi sier at d er underordnet c der d,c Inkl Spes(L;-1) hvis og bare hvis d enten er I-underordnet eller II-underordnet L. Vi skriver "d<c" for "d er underordnet c".

Er R en relasjon skal vi tillate oss å bruke "R|∞" for "ancestralet" til R. Dette innebærer at R|∞ er klassen av alle de par <x,y> der det finnes et naturlig tall n≥0 og elementer x;0,...,x;n der x=x;0 og y=x;n og der man har <x;0,x;1>êR & <x;1,x;2>êR &....& <x;(n–1),x;n>êR. Man ser at når R|∞ defineres på denne måten har man at <x,x>êR|∞ om x er med i domenet til R.

Tilslutt definerer vi, i det vi forutsetter at F er en formel i L (der L er et I;0-språk), "C;F" ved:

C;F = k(UN(Mg(c: <c,Spes[X;w(F)]>ê (<|∞))

Vi bemerker at C;F er en endelig mengde med spesielle predikater. Videre nevnes det at det stilltiende vil bli gjort bruk av de følgende fakta om X;w: Man har at Spes[X;w(F)] = Spes[X;w'(F)] om F er en formel i L og w,w' er to variabeltegn som ikke forekommer i F. Vi bruker uttrykket "Spes;1(L;-1)" for å betegne mengden av de spesielle predikatene av typen P«µ(F)» i L;-1 og uttrykket "Spes;2(L;-1)" for å betegne mengden av de spesielle predikatene i L av typen P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F)». Anta R er en modell for L og at FêFml(L). Anta F' er en R-instans av F. Da har man at Spes[X;w(F')] = Spes[X;w(F)] og dessuten at C;F= C;F'.

Det er nå passende å ta for seg beviset for Teorem 7.1:

Bevis for Teorem 7.1: Anta FêCFml(L) og at (0) ¬((¬F)êTh(I;0,L). Da har man at T' = ß({F},I;0,L) er en konsistent I;0-teori i L. Ifølge fullstendighetsteoremet for I;0 finnes det da en seminormal I;0-modell R slik at (1) R:= T'. Da har man
(2) R:= F og derfor, siden F er en lukket formel i L, at (3) R(F) =1. Vi betrakter <R;-1,L;-1>. Vi skal modifisere R;-1 til en normal første-ordens struktur for L;-1. Denne modifikasjonen av R;-1 betegnes med "R*". Denne defineres slik i det man setter:

(i) |R*| = |R;-1|
(ii) *(R*) = *(R;-1)
(iii) R*(u) = R;-1(u) om u enten er en singulær term i snever forstand, en konstant eller et n-ært predikat i L. Vi har derfor at R*(u) = R(u) for ikke-logiske symboler i L av denne art.

Siden |R*| og L er fiksert er også £;(L;-1,R*), *f*;(L;-1,R*) og g;(L;-1,R*) fiksert. Fra beviset for fullstendighetsteoremet for I;0 fremgår det også at vi kan anta:

(4) X;(R,L) = CFml(£;(L;-1,R*))
(5) f(R) = f;(L;-1,R*)
(6) g(R) = g;(L;-1,R*)

Vi skal derfor fra nå av arbeide med uttrykkene "X;(R.L)", "f(R)" og "g(R)" i stedet for de mer kompliserte uttrykkene til høyre i identitetene (4) – (6). Vi setter videre:

(iv) R*(U) = R;-1(U)
(v) R*(t;<m,n>) = R;-1(t;<m,n>)

Det gjenstår nå bare å definere R*(s) om s er et spesielt predikat i L;-1.

La QêSpes;1(L;-1). Da har man Q= P«μ(G)» for en eller annen formel G i L. Vi har at «G» er av grad m for noe m≥0. Vi definerer da W;(R,Q) ved å sette:

(7) <«g(R)(G)»[f(R)(y;1),...,f(R)(y;m)],x>êW;(R,Q) <–> <x,y;1,...,y;m>êR;-1(Q)

Videre definerer vi:

(8) W;(F,R) = UN/QêC;FΩSpes;1(L;-1)/(W;(R,Q))

Som i beviset for Teorem 5.1 viser vi:

(9) W;(F,R) er en korrelasjon.
(10) W;(F,R) Inkl G(R)Ω(|R|X X;(R,L))
(11) Cd(CFml(£;(L;-1,R)) – Dom(W;(F,R))) = Cd(X;(R,L) – Dom(W;(F,R))) = Aleph;0.

Vi definerer nå:

(vi) S;<m,n>(R)(x;1,...,x;m) = Mg(y: <x;1,...,x;m,y>êR(t;<m,n>))
(vii) S;<m,n>(2R) = UN/<x;1,...,x;m>ê|R|^m/(S;<m,n>(R)(x;1,...,x;m))
(viii) S(3R) = UN/<m,n>êE/(S;<m,n>(2R))

Man ser at yêS(3R) hvis og bare hvis det finnes <m,n>êE (E er indeksmengden for de strenge intensjonale operatorene i L) og det finnes x;1,...,x;mê|R| slik at <x;1,...,x;m,y>êR(t;<m,n>).

Vi betrakter q;(F,R) definert ved:

(12) q;(F,R) = (S(3R) – Rgn(W;(F,R)))

Denne mengden q(F,R) kan være endelig eller uendelig. Vi har imidlertid at

(13) Cd(R(U) – Rgn(W;(F,R))Uq;(F,R)) = Aleph;0.

Vi har om GêDom(W;(F,R)) at det finnes z slik at <G,z>êW;(F,R), og derfor at det finnes Q der QêC;FΩSpes;1(L;-1) og der <G,z>êW;(R,Q). Fra dette og definisjonen av "W;(R,Q)" Siden QêSpes;1(L;-1) følger det at Q = P«μ(H)» for en eller annen formel H i L videre følger det at det må finnes y;1,...,y;mê|R;-1| slik at G = «g(R)(H)»[f(R)(y;1),....,f(R)(y;m)]. Mao. det må finnes en matrise H' slik at
G = H'[c;1,...,c;m] der c;1,...,c;mêConst(£(R)) og der vi har at H' er av grad m≥0. Vi kan også anta her at H' = «H». Siden C;F er endelig finnes det bare et endelig antall matriser «G;1»,...,«G;j» slik at dersom «G;k»êDom(W;(F,R)) så er
H';k= G;k[c;(k,1),...,c;(k,n(k))] , c;(k,1),....,c;(k,n(k))êCost(£(R)) og G;k av grad n(k). La s= Max({n(1),....,n(j)}. Man kan da opplagt finne en formel G° i X;(R,L) slik at graden til «G°» er større enn s. La G0 = (G° v ¬G°). Vi bruker "Grad(F)" for å betegne graden til matrisen F. Man har da:

Grad(«G0») = Grad(«G°»)+ Grad(«G°») = 2*h>s om Grad(«G°»)=h>s.

Vi har derfor at ¬(G0êDom(W;(F,R))). Vi setter:

(14) DD(R) = Mg(«G0»[f(R)(y;1),...,f(R)(y;h), f(R)(y;1),...,f(R)(y;h)] : y;1,....,y;hê|R|)

man har da at (15) Cd(DD(R)) = Aleph;0. Videre har man:

(16) DD(R)ΩDom(W;(F,R)) = ø.

La nå F være en korrelasjon der Rgn(F) = q;(F,R) og der F;-1"(q;(F,R)) Inkl DD(R) om q;(F,R) er endelig og som er slik at F;-1"(q;(F,R)) = DD(R) om q;(F,R) er tellbart uendelig. Man har da at;

(17) W+;(F,R) = W;(F,R)UF er en korrelasjon.

(18) Cd(X;(R,L) – Dom(W+;(F,R))) = Aleph;0

(19) Cd(R(U) – Rgn(W+;(F,R))) = Aleph;0

Fra (18) og (19) følger det at det finnes en korrelasjon V mellom X;(R,L) – Dom(W+;(F,R)) og R(U) – Rgn(W+;(F,R)). Vi definerer:

(20) W°;(F,R) = W+;(F,R) U V.

Vi må åpenbart ha at W°;(F,R) er en korrelasjon.

Det er etter disse forberedelsene mulig å gjøre definisjonen av R* fullstendig.

(ix) Er uêC;F setter man R*(u) = R;-1(u)

(x) Er uê(Spes;1(L;-1) – C;F) har vi at u = P«μ(G)» for noe GêFml(L) der vi kan forutsette at G er av grad n≥0. Vi setter da:
R*(P«μ(G)») = Mg(<x,y;1,...,y;n>: x = W°(F,R)(g(R)(G)[f(R)(y;1),...,f(R)(y;n)])

(xi) Er uê(Spes;2(L;-1) – C;F) har vi at u = P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,G)» for noe GêFml(L) der vi kan forutsette at G er av grad n≥0. Da setter man:
R*(P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,G)») = Mg(<x;1,...,x;m,y;1,....,y;n>: <W°(F,R)(g(R)(G)[f(R)(y;1),...,f(R)(y;n)],x;1,...,x;m>êR;-1(t;<m,n>))

Dermed er R* fullstendig definert. Ved et enkelt og trivielt induksjonsbevis på lengden av velformede uttrykk kan man vise:

(21) Anta GêCFml(L;-1(|R;-1|)) og at têCTerm(L;-1(|R;-1|)). Anta Spes[G] Inkl C;F og Spes[t] Inkl C;F. Da gjelder:
(a) R;-1(G) = R*(G)
(b) R:-1(t) = R*(t)

På samme måte som i beviset for Teorem 5.1 kan man vise:

(22) R* er en normal første-ordens struktur for L;-1.

Dette innebærer i lys av definisjonen av R*;-2 at vi vil ha R*;-2êNorm+;(I;0)(L) om man kan vise:

(23) *f*;<m,n>(R*;-2)(x;1,...,x;m) Inkl Tr;L(R*;-2) om <m,n>êE og x;1,...,x;mê|R*;-2|

La oss gi et bevis for (23): Anta Gê*f*;<m,n>(R*;-2)(x;1,...,x;m) og anta

(24) x;1,...,x;mê|R*;-2| & <m,n>êE. Etter definisjonen av "*f*;<m,n>(R*;-2)" har man:

(25) <W°;(F,R)(G), x;1,...,x;m>êR*(t;<m,n>)

Siden <m,n>êE må man da ha W°;(F,R)êS(3R). Vi skiller mellom to tilfeller:

Tilfelle (i): W°;(F,R)êq;(F,R). Da har man W;(F,R)U F UV(G) = F(H) for noe HêDD(R). Det følger da at G=H. Men vi har åpenbart at DD(R) Inkl Tr;L(R*;-2). Da GêTr;L(R*;-2).

Tilfelle (ii): Anta W°;(F,R)(G)êRgn(W;(F,R)). Da har vi per definisjon at det finnes et spesielt predikat P«μ(H)»êC;F slik at

W°;(F,R)(G) = W;(R, P«μ(H)»)(G') for noe G'.

Vi kan anta at graden til «H» er n≥0. Man har da at det finnes y;1,...,y;n i |R| slik at (26)

G = «g(R)(H)»[f(R)(y;1),...,f(R)(y;n)] og slik at:

<W°;(F,R)(G), «g(R)(H)»[f(R)(y;1),...,f(R)(y;n)]> êG(R)

Herav: W°;(F,R)(G) = G(R)(«g(R)(H)»[f(R)(y;1),...,f(R)(y;n)]). Dette, (25) og det faktum at R*(t;<m,n>) = R;-1(t;<m,n>) = R(t;<m,n>) gir en at

«g(R)(H)»[f(R)(y;1),...,f(R)(y;n)]ê*f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;m)

Siden <m,n>êE har man derfor at

«g(R)(H)»[f(R)(y;1),...,f(R)(y;n)]êTr;L(R) som impliserer, om i;1,...,i;n er navnene på henholdsvis y;1,...,y;n at R(«H»[i;1,....,i;n]) = 1. Det følger ved hjelp av Lemma 4.2 at R;-1(X;w(«H»[i;1,....,i;n])) = 1.

Nå har man siden P«μ(h)»êC;F at

Spes[X;w(«H»[i;1,...,i;n])] = Spes[X;w(G)] = C;F. Derfor har man i lys av (21):

R*(X;w(«H»[i;1,...,i;n])) =1

Da har man imidlertid ved hjelp av Lemma 4.3 at R*;-2(X;w(«H»[i;1,...,i;n]))=1. I lys av det faktum at:

g(R)(«H»[i;1,...,i;n]) = g(R*;-2)(«H»[i;1,...,i;n]) =
= «g(R*;-2)(H)»[f;(R*;-2)(¢(i;1)),...., ;(R*;-2)(¢(i;n))][1]
= «g(R)(H)»[f(R)(y;1),...,f(R)(y;n)] = G

følger det at GêTr;L(R*;-2) som er det vi ønsker. Dette avslutter vårt bevis for (23). Vi kan nå avslutte beviset for Teorem 7.1:

Fra (22) og (23) følger at R*;-2êNorm+;(I;0)(L). Siden vi har R(F)=1 følger det ved hjelp av Lemma 4.2 og Lemma 4.3 og (21), i lys av det faktum at Spes[X;w(F)] Inkl C;F at R*;-2(F) =1. Siden F er lukket innebærer dette at R*;-2:= F. Men fra dette har vi R*;-2 := T'. Fra dette følger så lett Teorem 7.1. **Q.E.D.**

Et spørsmål som umiddelbart oppstår i forbindelse med Teorem 7.1 er om vi kan finne et teorem som står i samme relasjon til dette som Teorem 5.1 står i forhold til Korollar 5.2. Faktisk synes dette å være tilfelle. Ved en konstruksjon som nesten i alt vesentlig er som den i beviset ovenfor (og i beviset for Teorem 5.1) kan vi bevise det følgende teorem om vi lar "Taut(L)" betegne klassen av alle de formler i L som er instanser av et eller annet setningslogisk gyldig skjema:

Teorem 7.2 Anta FêTaut(L) og anta videre at Grad(«F»)≥1. La

h = <P«μ(F)», P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F»>.

La Δ Inkl Fml(L) og anta UN(C;F: FêΔ) Inkl (Spes(L;-1) – {(h);0,(h);1}). La T = ß(Δ,I;0,L) være en konsistent I;0-teori i L.

Da finnes en RêNorm+;(I;0)(L) der man har at R:= T.

Vi gir ikke noe detaljert bevis for denne påstanden. Man ser imidlertid forholdsvis lett at Teorem 7.1 følger fra denne satsen. Selv om dette teoremet sier adskillig mer en Teorem 7.1 synes det rimelig å spørre om man ikke kan erstatte forutsetningene med noen som er enda svakere slik at man kan få et enda sterkere teorem som resultat. Vi har imidlertid ikke detaljert studert dette problem og kan derfor ikke fremlegge noen konkrete resultater av relevans for det.

---

[1] ¢(i), hvor i er et navn, betegner det objektet som i er et navn på.

§8 I:0 er sterkt komplett med hensyn på de normale I:0-modellene. Relaterte resultater.

Vi viste ovenfor at I;0 er svakt komplett med hensyn på Norm+;(I;0)(L). Siden Norm+;(I;0)(L) Inkl Norm;(I;0)(L) følger det også selvfølgelig at I;0 er svakt komplett med hensyn på Norm;(I;0)(L). På dette punkt stiller man seg umiddelbart spørsmålet om I;0 er sterkt komplett med hensyn på Norm;(I;0)(L) siden den teorien vi kontruerte i §5, og som vi der viste at ikke hadde noen modell i klassen Norm+;(I;0)(L), faktisk har en modell i Norm;(I;0)(L). Vi skal nå vise at dette spørsmålet kan besvares bekreftende.

Lemma 8.1 La T = ß(Δ,I;0,L) være en konsistent I;0-teori i L. La L' være I;0 utvidet med en tellbart uendelig mengde med nye konstanter k;1, k;2, k;3,..... Sett per definisjon: Δ;i = Mg(¬(k;i=μ(F)) : FêFml(L')) og definer Δ;u ved:

Δ;u = UN/i,1,∞/(Δ;i)U Mg(U(k;i): iêN} U Mg(k;i≠k;j: i,jêN & i≠j & i,j≥1}

Da er T' = ß(ΔUΔ;u,I;0,L') en konsistent I;0-teori i L'.

Bevis: Anta T' er inkonsistent. Da finnes G slik at (1) ΔUΔ;u :– G&¬G. Ved hjelp av reduksjonsteoremet følger det da at det finnes formler G;1,....,G;nêΔ og formler H;1,....,H;mêΔ;u der man har:

(2) (I;0,L) :– ¬(G';1 & ....& G';n&H';1&....&H';m) der G';i er lukningen av G;i for i=1,...,n og H';j er lukningen av H;j for j=1,...,n.

Nå skal vi imidlertid vise at:

(3) T1 = ß({G';1, ..., G';n,H';1,....,H';m},I;0,L') er konsistent.

Dette innebærer at det ikke kan finnes noen G slik at (1) holder. T' må i så fall være konsistent.

Siden T = ß(Δ,I;0,L) forutsettes å være konsistent og {G;1,...,G;n} Inkl Δ må man ha:

(4) T2 = ß({G;1,...,G;n},I;0,L) er konsistent.

Vi kan anta at det finnes formler F;1,....,F;k i L' og et naturlig tall j≥1 slik at de diverse H;1,...,H;m er de følgende setninger:

(5) U(k;1),.....,U(k;j) samt alle setningene i mengden

(6) UN/i,1,j/(Mg(k;i≠μ(F;s) : 1≤s≤k) samt alle setningene

(7) k;p ≠ k;q der 1≤ p≠q≤j.

Fra (4) og Teorem 2.1 i §2 i Kapittel IV i Rognes [1] følger at det finnes en seminormal I;0-modell R for L som er slik at:

(8) R := T2.

Vi skal utvide denne modellen til en seminormal I;0-modell R' for L' der vi har at R' := T1. Fra dette følger umiddelbart at T1 er konsistent, dvs. (3).

La p være et vilkårlig naturlig tall der 1≤p≤k. Da finnes det et naturlig tall t slik at Grad«F;p») = t. Vi definerer:

(9) D;p = Mg(G(R)(«g(R)(F;p)»[f(R)(y;1),...,f(R)(y;t)] : y;1,...,y;tê|R|)

Vi setter per definisjon:

(10) S;j = UN/p,1,j/(D;p)

Det skulle være klart at (11) S;j Inkl R(U). Videre har vi at:

(12) Cd(R(U) – S;j) = Aleph;0

For sett (13) r1 = Max({Grad(«F;1»),...., Grad(«F;k»)}). Det er klart vi kan velge ut en formel F;0 slik at der Grad(«F;0»)= r2 > r1. Siden Cd(|R|) = Aleph;0 har man om man setter:

(14) K = Mg(«G(R)(F;0)»[f(R)(y;1),...,f(R)(y;r2)] : y;1,...,y;r2ê|R|)

at Cd(K) = Aleph;0. Men vi har åpenbart at G(R)"K Inkl R(U) og at

G(R)"K ΩS;j =ø i lys av (13), Lemma 2.0 og det faktum at G(R)Ω(|R|X X;(R,L)) er en korrelasjon. Det følger derfor at (12) er korrekt.

Fra (12) følger det at det finnes en enummerering a av elementene i R(U)–S;j. La a;1,a;2,..... osv. være elementene i denne enummereringen. Da har man selvfølgelig at disse elementene er innbyrdes distinkte, dvs. at a;i ≠ a;j om i≠j og i,j≥1. Vi har også:

(15) (R(U) –S;j) = {a;1,a;2,....,a;n,...}

Vi kan nå definere R'. R' er en ekspansjon av R til L' som er fullstendig definert ved at man setter:

(16) R'(k;q) = a;q for q=1,2,..... ad. inf.

Ved enkelt og temmelig trivielt induksjonsbevis (som overlates til leseren) kan man nå vise:

(17) Anta FêCFml(L(R)) og têCTerm(L(R)). Da gjelder:
(a) R(F) = R'(F)
(b) R(t) = R'(t)

Dette og (8) impliserer, siden T2 Inkl Fml(L) at (18) R':= T2. Man ser umiddelbart at alle setningene nevnt ved (5) og (7) er gyldige i R'. Med andre ord har vi:

(19) R':= U(k;p) p =1,...,j

(20) R' := (k;p≠k;q) om p≠q der 1≤p,q≤j

Det gjenstår å vise:

(21) R' := (k;i ≠ μ(F;s)) der 1≤i ≤j og 1≤s≤k

Anta x;1,....,x;t er de variablene som forekommer fri i F;s. En R-instans av k;i≠μ(F;s) vil være av formen: k;i ≠ μ((F;s);(x;1,.....,x;t)[i;1,....,i;t]). Man må ha at Grad(«F;s») = r ≥0 for noe naturlig tall r. Det må også være slik at r≥t. Videre må det finnes konstanter eller navn e;1,....,e;r slik at:

(22) (F;s);(x;1,.....,x;t)[i;1,....,i;t] = «F;s»[e;1,.....,e;r]

Nå har man:

(23) g(R')((F;s);(x;1,.....,x;t)[i;1,....,i;t]) = g(R')(«F;s»[e;1,.....,e;r])
= «g(R')(F;s»[g(R')(e;1),....,g(R')(e;r)]
= «g(R')(F;s»[f(R')(R'(e;1)),....,f(R')(R'(e;r))]

Det følger at

(24) R'((F;s);(x;1,.....,x;t)[i;1,....,i;t]) =
G(R')(«g(R')(F;s»[f(R')(R'(e;1)),....,f(R')(R'(e;r))])êS;j

Men nå har man på den annen side:

(25) R'(k;i) = a;i ê(R(U)–S;j) (Jmf. (15) og (16))

Fra (24) og (25) følger:

R'(k;i≠ μ((F;s);(x;1,.....,x;t)[i;1,....,i;t])) =1

Men k;i≠(F;s);(x;1,.....,x;t)[i;1,....,i;t] var en vilkårlig R-instans av k;i ≠ μ(F;s). Følgelig holder (21).

Vi har nå vist at G;1,....,G;n,H;1,....,H;m er gyldige i R'. Det følger at (22) R' := T1. Men dette impliserer at (3) er tilfelle. Dette avslutter beviset for Lemma 8.1. **Q.E.D.**

Vi trenger nok en hjelpesetning før vi kan formulere og bevise vårt kompletthetsresultat.

Lemma 8.2 La L' være et I;0-språk som inneholder en tellbart uendelig mengde med konstanter k;1,k;2,...,k;n,.... . Sett per definisjon:

Δ;i = Mg(¬(k;i=μ(F)) : FêFml(L'))

og definer Δ;u ved:

Δ;u = UN/i,1,∞/(Δ;i)U Mg(U(k;i): iêN} U Mg(k;i≠k;j: i,jêN & i≠j & i,j≥1}
Anta T'=ß(Δ,I;0,L') er en konsistent I;0-teori i L' der Δ;u Inkl T'. Da gjelder:
(ER)(RêNorm;(I;0)(L') & R:= T)

Bevis: Beviset har i det vesetlige den samme struktur som beviset for Teorem 2.1 i §2, Kapittel IV i Rognes [1]. Vi utvider T' til en komplett Henkin-teori T på samme måte som i dette beviset. Vi definerer så strukturen R;T nøyaktig som der. Dette innebærer at vi definerer en I;0-modell R;T = <m;T,g;T,∏;T> der
m;T = <*;T, D;T, f;T,£;T,<*f*;T(<m,n>)>/<m,n>êNXN, G;T>.
Alle komponentene er konstruert på samme måte som i beviset for Teorem 2.1 i §2,Kapittel IV i Rognes [1]. På samme måte som tidligere er det mulig å bevise at G;T er en en-entydig funksjon. Vi definerer så C1 og C2 på følgende vis:

(1) C1 = Mg(∂([c]) : T :– (U(c)) & (EF)(FêCFml(L) & T :– (c=μ(F))
(2) C2 = Mg(∂([c]) : T :– (U(c)) & ¬(EF)(FêCFml(L) & T :– (c=μ(F))

Det nye kommer akkurat på dette punkt. Det bør også bemerkes at vi forutsetter at T= ß(Δ;c, I;0,L) der Δ Inkl Δ;c og der L er en utvidelse av L' med spesielle konstanter. Siden vi har at T' Inkl T og Δ;u Inkl T' må vi ha (3) Δ;u Inkl T.
Vi skal nå vise at:
(4) C2 er en tellbart uendelig mengde.
Det vil være tilstrekkelig å bevise at ∂([k;i])ê C2 for hvert iêN og at
∂([k;i]) ≠ ∂([k;j]) om i≠j (i,j≥0). Det siste følger umiddelbart fra det faktum at
(k;i≠k;j) êΔ;u Inkl T når i≠j. La j være et vilkårlig naturlig og anta:
(5) (EF)(FêCFml(L) & T :– k;j =μ(F))
Da har vi naturligvis at det finnes en F slik at (6) FêCFml(L) og
(7) T :– (k;j =μ(F)). La c;1,...,c;n være de konstantene som forekommer i F. la y;1,...,y;n være variabeltegn som ikke forekommer i F. Da har man at
F' = F;(c;1,...,c;n)[y;1,...,y;n] er en formel i L', og siden Δ;u Inkl T at T :– k;j≠μ(F'). Det følger at T :– (Ay;1)...(Ay;n)(k;j≠μ(F'), og derfor
T :– k;j≠μ(F';(y;1,....,y;n)[c;1,...,c;n], det vil si T :– k;j≠μ(F). Men dette strider mot (7) siden T skal være en konsistent teori. Vi må følgelig ha:
(8) ¬(EF)(FêCFml(L) & T :– k;j =μ(F))
Siden Δ;u Inkl T har man T :– U(K;j). Dette og (8) gir oss umiddelbart i lys av (2) at ∂([k;j]) êC2. Men j var et vilkårlig tall i N. Derfor ∂([k;j]) êC2 for alle jêN. Vi innfører nå for hver cêC2 et unært predikat P;c og utvider L;T til L;(T,C2) ved å føye til alle disse nye predikatene. Vi har at Cd(CFml(L;(T,C2))) = Aleph;0 siden Cd(CFml(L;T))= Aleph;0 og Cd(C2) = Aleph;0. Videre må man åpenbart ha om man setter W = (CFml(L;(T,C2)) – CFml(L;T)) at Cd(W) = Aleph;0. Det må derfor finnes en korrelasjon G+ mellom W og C2. Vi defierer så G* ved å sette
G* = G+U G;T, videre defierer vi *f*;<m,n>, Z;<m,n>, g*,D*, f* £*, *:T og ∏* nøyaktig som i beviset for Teorem 2.1, §2, Kapittel IV i Rognes [1]. Vi har dermed gitt en fullstendig definisjon av modellen R*. Det er lett å verifisere at:
(9) R* êNorm;(I;0)(L).
Vi kan også bevise den følgende påstand:

(10) Anta FêCFml(L) og têCTerm(L). Da gjelder om c er en konstant i L:
(a) R*(F) = T <–> T :– F
(b) R*(t) = ∂([c]) <–> T :– (t=c)

Beviset for dette som Lemma 2.2, §2, Kapittel IV, Rognes [1]. (10) kan derfor anses som bevist. Fra (10) har man at (11) R*:= T. For anta T:– F da har man T:– F' der F' er lukningen av F. Da har man ved hjelp av (10) at R*(F') =1. Men da R* := F. Vi har derfor (AF)(FêT –> R* := F), med andre ord at (11) holder. Siden L bare er en utvidelse av L' med nye konstanter må man ha at

(12) R*|L'êNorm;(I;0)(L).

Videre innser man ved hjelp av et trivielt induksjonsbevis at (R*|L')(F) = R*(F) og (R*|L')(t) = R*(t) om FêCFml(L'(R*)) og têCFml(L'(R*)). Dette faktum og (11) impliserer, siden T' Inkl T at (13) R*|L' := T'. (12) og (13) gir oss det vi ønsker siden R*|L' er en modell av den typen vi søker. **Q.E.D.**

Det er nå lett å vise:

Teorem 8.3 La L være et I;0-språk, Δ Inkl Fml(L) og anta T = ß(Δ,I;0,L) er en konsistent I;0-teori i L. Da gjelder:

(ER)(RêNorm;(I;0)(L) & R:= T).

Bevis: La L' være L utvidet med helt nye konstanter k;1, k;2,.... ad inf. La T0 = ß(ΔUΔ;u,I;0,L') der

Δ;u = UN/i,1,∞/(Δ;i)U Mg(U(k;i): iêN} U Mg(k;i≠k;j: i,jêN & i≠j & i,j≥1}

og Δ;i er definert ved:

Δ;i = Mg(¬(k;i=μ(F)) : FêFml(L'))

I følge lemma 8.1 er T0 konsitent. Vi har Δ;u Inkl T0. Derfor har man ved hjelp av Lemma 8.2 at (1) RêNorm;(I;0)(L) & R := T0 for en eller annen R. Da følger at R|LêNorm;(I;0)(L) og R|L := T. **Q.E.D.**

Vi skulle nå ha skaffet oss full oversikt over forholdet mellom I;0 og modellklassene Sem;(I;0)(L), Norm;(I;0)(L) og Norm+;(I;0)(L). Som man ser har vi bevist at I;0 både er strengt og svakt komplett med hensyn på Sem;(I;0)(L) og Norm;(I;0)(L). Vi har at I;0 er svakt komplett, men ikke sterkt komplett med hensyn på Norm+;(I;0)(L). Beviset ovenfor gir oss umiddelbart et bevis for at I;0 er svakt komplett med hensyn på Norm;(I;0)(L). Men beviset for at I;0 er svakt komplett med hensyn på Norm+;(I;0)(L) (Se §5, §7) gir oss også et bevis for at I;0 er svakt komplett med hensyn på Norm;(I;0)(L) siden Norm+;(I;0)(L) er en delmengde av Norm;(I;0)(L). I disse bevisene konstruerer vi forskjellige modeller. I det ene konstruerer vi en strengt normal I;0-modell. I det andre en som overhodet ikke kan være strengt normal. Det forekommer meg som om begge bevisene er opplysende og at de sammen gir en noe dypere innsikt i visse sider ved systemet I;0.

La oss på dette punkt fremsette to bemerkninger. For det første kan det nevnes at vårt bevis for Lemma 8.1 kan sammenlignes med Henkins bevis for eksistensen av ikke-standard modeller for aritmetikk. Faktisk fikk vi idéen til beviset ovenfor ved et studium av Henkins argument.

For det andre kan det noteres at det er mulig å gi et litt annet bevis for Teorem 8.3 ved å benytte hjelpesetningene nedenfor istedenfor Lemma 8.2. Vi kaller en seminormal I;0-modell R for L for *tellbart uendelig* hvis og bare hvis:

(a) Cd(|R|) = Aleph;0 og

(b) Cd(CFml(£(R))) = Aleph;0.

Er R,R' to I;0-modeller for L kalles de *elementært ekvivalente* hvis og bare hvis man har at R'(F) = R(F) for alle FêCFml(L).

Vi har:

Lemma 8.4 La R være en tellbart uendelig seminormal I;0-modell for L der man har Cd(R(U) – G(R)"X;(R,L)) = Aleph;0. Da finnes det en normal I;0-modell R' for L som er elementært ekvivalent med R.

Bevis: Vi definerer R' ved å sette:

(1) *(R') = *(R)
(2) |R'| = |R|
(3) f(R') = f(R)
(4) £(R') = £(R)

Siden R(U) – G(R)"X;(R,L) er tellbart uendelig må CFml(£(R))– X;(R,L) være tellbart uendelig. Det finnes derfor en korrelasjon,V, mellom CFml(£(R))– X;(R,L) og R(U) – G(R)"X;(R,L). Vi definerer derfor G(R') ved:

(5) G(R') = G(R)Ω(|R|X X;(R,L)) U V

Man ser at G(R') må være en korrelasjon siden

Dom(G(R)Ω(|R|X X;(R,L)) Ω Dom(V) =ø

Er u et predikat, en singulær term i snever forstand eller en konstant i L setter vi:

(6) R'(u) = R(u)

Spesielt setter vi R'(t;<m,n>) = R(t;<m,n>) og R'(U) = R(U). Vi definerer:

(7) *f*;<m,n>(R')(x;1,....,x;m) = Mg(G(R'):-1(y): <y,x;1,...,x;m>êR'(t;<m,n>))

Dette avslutter definisjonen av R' i det vi lar L-morfien g(R') = g(R).

Vi har at <y,x;1,...,x;m>êR'(t;<m,n>) hvis og bare hvis y = G(R')(F) og Fê*f*;<m,n>(R')(x;1,...,x;m) for noen formel F. Det siste er i kraft av (7) ekvivalent med F = G(R');-1(y') & <y',x;1,...,x;m>êR(t;<m,n>) for noe y'ê|R'|. Det følger at y'=y. og derfor at <y,x;1,...,x;m>êR(t;<m,n>). At <y,x;1,...,x;m>êR(t;<m,n>) impliserer <y,x;1,...,x;m>êR'(t;<m,n>) skulle også være klart. R'(t;<m,n>) er derfor veldefinert.

På en lignende måte ser man at

R'(U) = G(R')(CFml(£(R')) = G(R)(CFml(£(R)) = R(U).

R'(U) er derfor også veldefinert. Det er nå likefrem å verifisere ved et enkelt induksjonsbevis at man har:

(8) Er FêCFml(L(R)) og têCTerm(L(R)) gjelder:
  (i) R'(F) = R(F)
  (ii) R'(t) = R(t)

Fra (8) følger så påstanden som skulle bevises. **Q.E.D.**

Lemma 8.5 La L' være et I;0-språk som inneholder en tellbart uendelig mengde med konstanter k;1, k;2, … ad inf. Sett per definisjon:

Δ;i = Mg(¬(k;i=μ(F)) : FêFml(L'))

og definer Δ;u ved:

Δ;u = UN/i,1,∞/(Δ;i)U Mg(U(k;i): iêN} U Mg(k;i≠k;j: i,jêN & i≠j & i,j≥1}

Anta T =ß(Δ,I;0,L') er en konsistent I;0-teori i L' der Δ;u Inkl T. Da finnes det en tellbart uendelig seminormal modell RêSem;(I;0)(L') der

Cd(R(u) – G(R)"X;(R,L))= Aleph;0 og hvor R:= T.

Beviset for dette er i alt vesentlig som beviset for Teorem 2.1 i §2,Kapittel IV i Rognes [1]. Siden Δ;u Inkl T kan man slutte at C2, slik denne konstrueres i dette beviset, er tellbart uendelig og derfor at Cd(R(u) – G(R)"X;(R,L))= Aleph;0 der R er den modellen vi konstruereri løpet av beviset.

Man ser nå at Teorem 8.3 er en temmelig umiddelbar konsekvens av Lemma 8.1 og Lemma 8.4 og 8.5. De to beviene for Teorem 8.3 som vi nå har gitt har i det vesentlige den samme struktur. Det siste er imidlertid litt lengre siden beviset for Lemma 8.5 er minst like langt som beviset for Lemma 8.2. Imidlertid har vi nå skilt ut en sats som det kan ha en viss interesse å betrakte for sin egen skyld, nemlig Lemma 8.4.

§9 Fullstendighetsresultater for systemer som er svakere enn I:0.

Vi har inntil nå beskjeftiget oss med systemet I;0 og forbedret kompletthets-teoremene for dette systemet. Vi skal i denne paragrafen studere en del systemer som er svakere, men likevel nær beslektet med I;0.

Først ser vi på systemet I;0*. Dette systemet har nøyaktig de samme aksiomskjemaene som I;0, men med de følgende forandringer og tillegg: Aksiomskjemaet A16 brukes nå bare når <m,n> ikke er med i h, indeksmengden for de strenge intesjonale operatorene. Er <m,n>êh legger vi til det følgende aksiomskjema:

A21 $T;<m,n>(x;1,....,x;m,F) \leftrightarrow (t;<m,n>(x;1,...,x;m,\mu(F) \& F)$

Slutningsregler i I;0 er modus ponens og universell generalisering, dvs. de samme som for I;0. A1 – A20 refererer her til aksiomskjemaene A1 – A20 som er oppført i Kapittel III, §1 i Rognes [1]. For oversiktlighetens skyld gjengir vi dem her:

A1 $F \rightarrow (G \rightarrow F)$

A2 $(F \rightarrow (G \rightarrow H)) \rightarrow ((F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H))$

A3 $((\neg G) \rightarrow (\neg F)) \rightarrow (F \rightarrow G)$

A4 $(Ax)F \rightarrow F;x[a]$ forutsatt at a enten er en konstant eller et variabeltegn i L.

A5 $(Ax)(F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow (Ax)G)$ forutsatt at x ikke forekommer fri i F.

A6 $(Ax)(x=x)$

A7 $x = y \rightarrow (F \rightarrow F')$ forutsatt at F' er som F unntatt eventuelt ved å ha en fri forekomst av y på et eller flere steder hvor F har en fri forekomst av x

A8 $t;1 = r;1 \& ... \& t;m = r;m \rightarrow (P(t;1,...,t;m) \rightarrow P(r;1,...,r;m))$ forutsatt at t;1,...,t;m,r;1,...,r;m er termer i L og P et m-ært predikat i L ($m \geq 1$)

A9 $t;1 = r;1 \& ... \& t;m = r;m \rightarrow (T;<m,n>(t;1,...,t;m,F) \rightarrow T;<m,n>(r;1,...,r;m,F)$ forutsatt at t;1,...,t;m,r;1,...,r;m er termer i L og F er en m-ært formel i L ($m \geq 0$)

A10 $P(t;1,...,t;n) \rightarrow (Ex)(x= t;i)$ $(i =1,..,n)$ forutsatt at P er et n-ært predikat i L, t;1,...,t;n termer i L og x ikke forekommer fri i t;i.

A11 $T;<m,n>(t;1,...,t;m,F) \rightarrow (Ex)(x= t;i)$ $(i =1,..,m)$ forutsatt at t;1,...,t;n termer i L og x ikke forekommer fri i t;i.

A12 $t;1 = r;1 \& ... \& t;n = r;n \rightarrow (f(t;1,...,t;n) = f(r;1,...,r;n))$ forutsatt at t;1,...,t;m,r;1,...,r;m er termer i L og f et n-ært funksjonssymbol i L ($m \geq 1$)

A13 $(Ex)(x= f(t;1,....,t;n)) \leftrightarrow (Ex)(x=t;1) \&.... \& (Ex)(x=t;n)$ forutsatt at x ikke forekommer fri i noen av t;1,...,t;n.

A14 $(Ay)(y = (ix)F \leftrightarrow (Ax)(F \leftrightarrow x=y)$ forutsatt at y ikke forekommer fri i F

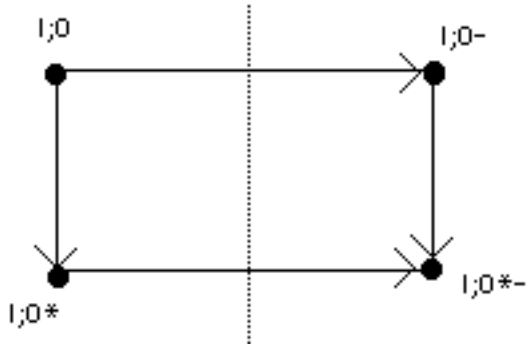
A15 U(μ(F))
A16 T;<m,n>(x;1,...,x;n,F) <–> t;<m,n>(x;1,...,x;n,μ(F))
A17 t;<m,n>(x;1,...,x;n,y) –> U(y)
A18 μ(F)≠ μ(G) forutsatt at F og G er distinkte formler og F ikke er noen substitusjonsinstans av G
A19 μ(F;(x;1,...,x;n)[a;1,...,a;n]) = μ(F;(x;1,...,x;n)[b;1,...,b;n]) –> a;i = b;i der i= 1,...,n forutsatt at a;1,...,a;n,b;1,...,b;n er enkle termer i L
A20 T;<m,n>(x,1,...,x;n,F) –> F forutsatt at <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator.

Det er lett å se at I;0* er inkludert i I;0. Når vi får forklart semantikken for I;0* er det også lett å vise at I;0* er strengt inkudert i I;0, dvs. at Th(I;0*,L) SInkl Th(I;0,L) for ethvert I;0-språk L.

Vi definerer dernest systemet I;0*–. Dette er definert nøyaktig som I;0* unntatt ved at vi har utelatt aksiomskjemaene A18 og A19. Systemet I;0*– har de samme sluningsreglene som I;0, nemlig modus ponens og universell generalisering.

Systemet I;0– er definert nøyaktig som I;0, untatt ved at vi har sløyfet aksiomskjemaene A18 og A19. Slutningsreglene er de samme som i I;0 og I;0*.

Fra definisjonene av de ulike systemene fremgår det at inklusjonsforholdene mellom dem er som i den følgende figur.



§9.1 Fullstendighetsresultat for kalkylen I:0*

Vi skal nå vise et kompletthetsresultat for systemet I;0*. Klassen av de seminormale I;0-modellene R for et I;0-språk L der vi lar ∏(R) være definert ved:

(1) ∏(R)(T;<m,n>(t;1,...,t;n,F)) =1 <–>
(g(R)(F)ê*f*;<m,n>(R)(R(t;1),...,R(t;n)) & ∏(R)(F) =1)

forutsatt at <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator, t;1,...,t;n er lukkede termer i L(R) og F en lukket formel i L(R) kaller vi her for Sem;(I;0*)(L).

Teorem 9.1.1 La T = ß(Δ,I;0*,L) være en I;0*-teori i L. Anta RêSem;(I;0*)(L) og anta R := Δ. Da har man R:= T.

Beviset for dette er likefrem og overlates til leseren.

Det følgende teorem viser at I;0* er komplett med hensyn på Sem;(I;0*)(L):

Teorem 9.1.2 Anta T' = ß(Δ', I;0*,L') er en konsistent I;0*-teori i et I;0-språk L. Da finnes e RêSem;(I;0*)(L) slik at R:= T'.

Beviset for denne satsen er i hovedtrekkene som beviset for Teorem 2.1 i Kapittel IV, §2 i Rognes [1]. Vi utvider T' til en komplett, konsistent Henkin- I;0*-teori T=ß(Δ,I;0*,L) der Δ' Inkl Δ og der L er en utvidelse av L' med spesielle konstanter. Vi definerer så R;T nøyaktig som i beviset for det nevnte teorem. Vi definerer også R* som i det nevnte bevis, men med de følgende forandringer:

Er <m,n>êh, ie. er <m,n> indeksen til en streng intensjonal operator definerer vi Z;<m,n>(c;1,...,c;m) ved:

(1) Z;<m,n>(c;1,...,c;m) = Mg(G: (Ec)(G ê(G+);-1"({∂([c]}) &
T :– t;<m,n>(c;1,...,c;m,c) &¬(EF)(FêCFml(L) &
T :– (c = μ(F)) & T :– F)))

Er imidlertid <m,n>ê(NXN–h) definerer vi Z;<m,n>(c;1,...,c;m) som tidligere. Det samme gjelder *f**;<m,n>. Nå definerer vi Æ;<m,n>(c;1,...,c;m) ved:

(2) Æ;<m,n>(c;1,...,c;m) = Mg(g;T(F): FêCFml(L) &
(Ec)(T :– t;<m,n>(c;1,...,c;m,c) & T :– c = μ(F) & ¬(T :– F))

Tilslutt defineres *f**;<m,n>, når <m,n>êh, ie. når <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator, ved:

(3) *f**;<m,n>(∂([c;1]),...,∂([c;m])) =
f;T(<m,n>)(∂([c;1]),...,∂([c;m]) U Z:<m,n>(c;1,...,c;m)UÆ;<m,n>(c;1,...,c;m)

Dermed er modellstukturen m* = <*, D*, f*,£*,<*f**;<m,n>>/<m,n>êNXN/,G*> definert og også modellen R* = <m*,g*,∏*> definert, siden g* og ∏* er som før. Det skulle være klart at alle komponentene i R* nå selvfølgelig er definert relativt til I;0*-teorien T = ß(Δ,I;0*,L).

Vi må nå bevise:

(4) Anta FêCFml(L) , têCTerm(L) og cêConst(L). Da gjelder:
(a) R*(F) = 1 <–> T :– F
(b) R*(t) = ∂([c]) <–> T :– (t=c).

Fra dette følger at R*:=T og herav følger så R*|L' := T' som er det vi ønsker.

Beviset for (4) er nesten i alle henseende likt det tilsvarende bevis for Lemma 2.2 i §2, Kapittel IV, Rognes [1]. De eneste tilfellene som krever fornyet betraktning er når F = T;<m,n>(x;1,...,x;m,G) og når F = t;<m,n>(t;1,...,t;(m+1)) der <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator. Vi går detaljert gjennom disse tilfellene som er nye.

(a) For enkelhetens skyld ser vi nå bare på det tilfelle der F = t;<m,n>(c;1,...c;(m+1)). Når dette er gjort kan leseren selv bevise (4) når F = t;<m,n>(t;1,...,t;(m+1)).

Anta (5) R*(t;<m,n>(c;1,...,c;(m+1))) =1. Da har man:

(6) R*(c;(m+1))êG*(*f**;<m,n>(R*(c;1),...,R*(c;m))). Dette innebærer at det finnes en formel G êCFml(L;(T,C2)) slik at:

(7) <∂([c;(m+1)]), G>ê G;T U G+ og der

(8) Gê*f*;T(<m,n>)(∂([c;1]),....,∂([c;m]) U Z;<m,n>(c;1,...,c;m) U
Æ;<m,n>(c;1,..,c;m)

Vi må her sondre mellom tre tilfelle:

Tilfelle (i): Gê*f*;T(<m,n>)(∂([c;1]),....,∂([c;m]). Da er GêCFml(L;T) og man har derfor at G;T(G) = ∂([c;(m+1)]). Dette tilfellet behandles nøyaktig som i beviset for Lemma 2.2, §2, Kapittel IV i Rognes [1].

Tilfelle (ii): GêZ;<m,n>(c;1,...,c;m). Da har man at GêW og derfor at G+(G) = ∂([c;(m+1)]) i lys av (7). Også i dette tilfellet går man frem som ved det tilsvarende punkt i beviset for det Lemma 2.2 som ble nevnt ovenfor. Det faktum at Z;<m,n>(c;1,...,c;m) er definert litt annerledes nå, siden <m,n>êh, spiller ingen vesentlig rolle.

Tilfelle (iii): GêÆ;<m,n>(c;1,...,c;m). Da har man:

(9) G = g;T(H) der

(10) T :– t;<m,n>(c;1,...,c;m,c) & T :– c = μ(H) & ¬(T :– H)

for en eller annen formel HêCFml(L) og cêConst(L). Fra (9) har man at GêCFml(£;T) og derfor i lys av (7) at G;T(G) = ∂([c;(m+1)]). Dette impliserer imidlertid i lys av definisjonen av G;T:

(11) T :– c;(m+1) = μ(G)

Videre impliserer (9) og (10):

(12) T :– c = μ(G) Fra (11) og (12) følger så T:– (c = c;(m+1)) som i lys av (10) gir oss T :– t;<m,n>(c;1,...,c;m,c;(m+1)) som er det vi ønsker.

I alle tilfellene har man T :– t;<m,n>(c;1,...,c;m,c;(m+1)) . Vi har altså vist:

(13) R*(t;<m,n>(c;1,...,c;(m+1))) =1 –> T :– t;<m,n>(c;1,...,c;m,c;(m+1))

Vi må imidlertid vise at det omvendte gjelder. Anta derfor:

(14) T :– t;<m,n>(c;1,...,c;m,c;(m+1))

Igjen må vi sondre mellom forskjellige tilfelle:

Hovedtilfelle (i): Anta (15) ¬(EF)(T:– c;(m+1)=μ(F) & T:– F). Vi ser da på to undertilfeller:

Subtilfelle (a): Man har:

(16) ¬(EF)(T:– c;(m+1)=μ(F)). Fra (14) og aksiom A17 følger da at c;(m+1)êC2 og derfor at det finnes G slik at (16.1) Gê(G+);-1({∂([c;(m+1)])}). Fra dette, (14), (15) og definisjonen av Z;<m,n> (<m,n>êh) følger at:

GêZ;<m,n>(c;1,...,c;m) Inkl *f**;<m,n>(∂([c;1]),...,∂([c;m])

Men dette og (16.1) impliserer R*(t;<m,n>)(c;1,....,c;m,c;(m+1))) =1.

Subtilfelle (b): Man har: (EF)(T:– c;(m+1)=μ(F)). Dette, (14) og (15) impliserer at det finnes G slik at

(17) T :– t;<m,n>(c;1,....,c;(m+1)) & T:– c;(m+1)=μ(H) & ¬(T:– H).

Da har man at

G' = g;T(G) êÆ;<m,n>(c;1,...,c;m) Inkl *f**;<m,n>(∂([c;1]),...,∂([c;1]))

Men siden G' = g;T(G) har man T:– μ(G) = μ(G'), og derfor i lys av (17) at T:– c;(m+1)=μ(G') som impliserer at G;T(G') = ∂([c;(m+1)]). Det følger at ∂([c;(m+1)])ê G*"*f**;<m,n>(∂([c;1]),...,∂([c;1])), og derfor at

R*(t;<m,n>(c;1,...,c;(m+1))) =1

Hovedtilfelle (ii): (EF)(T:– c;(m+1)=μ(F) & T:– F). Da har man for en eller annen formel H at

(18) T:– c;(m+1)=μ(H) & T:– H

Fra dette og (14) følger T :– t;<m,n>(c;1,....,c;m,μ(H) og T: – H. Fra dette følger i lys av A21 at T:– T;<m,n>(c;1,...,c;m,H) og derfor:

(19) g;T(H)ê*f*;T(<m,n>)(∂([c;1]),....,∂([c;m])) Inkl

f*;<m,n>(∂([c;1]),....,∂([c;m]))

Fra (18) følger: G;T(g;T(H)) = ∂([c;(m+1)]). Dette og (19) impliserer:

∂([c;(m+1)])êG*"f*;<m,n>(∂([c;1]),....,∂([c;m]))

Dette impliserer i sin tur:

(20) R*(t;<m,n>(c;1,...,c;(m+1))) =1

I alle tilfelle har man altså at (20) holder. Vi har derfor vist det omvendte av (13) og kan derfor konkludere med

(21) R*(t;<m,n>(c;1,...,c;(m+1))) =1 <–>T :– t;<m,n>(c;1,...,c;m,c;(m+1))

For å fullføre beviset for Teorem 9.1.2 må man vise at (4) også holder om F = T;<m,n>(t;1,...,t;n,G) for en eller annen G. Dette er imidlertid likefrem og vi overlater beviset til leseren. Vi anser dermed Teorem 9.1.2 som godtgjort. **Q.E.D.**

§9.2 Fullstendighetsresultat for kalkylen I:0*–

Vi går nå over til å studere systemet I;0*–. Klassen av alle de I;0-modellene R for L som oppfyller de følgende to krav betegner vi med "Mod;(I;0*–)(L)":

C1 ∏(R)(T:<m,n>(t;1,....,t;m,F) = 1 <–>
g(R)(F) êf;<m,n>(R)(R(t;1),...,R(t;m)) & R(F)=1 forutsatt at
T;<m,n>(t;1,....,t;m,F)êCFml(L(R))

C2 F,HêCFml(£(R)) & G(R)(F)=G(R)(H) &
Fêf;<m,n>(R)(x;1,...,x;m). –> Hêf;<m,n>(R)(x;1,...,x;m)

Det er en enkel øvelse å verifisere at Ax(I;0*–, L) Inkl Val;L(Mod;(I;0*–)(L)). Man har følgelig:

Teorem 9.2.1 La T = ß(Δ, I;0*–,L) være en I;0*– -teori i L. Anta RêMod;(I;0*–)(L) og at R:= Δ. Da gjelder R:= T.

Vi skal nå bevise det følgende kompletthetsteorem for I;0*– :

Teorem 9.2.2 Anta T' = ß(Δ', I;0*–, L') er en konstitent I;0*– -teori i L. Da finnes det en modell RêMod;(I;0*–)(L) som er slik at R:= T.

Bevis: Vi utvider T' til en komplett, konsistent, Henkin-teori T = ß(Δ, I;0*–,L) der Δ' Inkl Δ og der L er en utvidelse av L' med spesielle konstanter. Vi definerer så R:T og R* nøyaktig som i beviset for Teorem 9.1.2, unntatt selvfølgelig ved at komponentene i modellene R* og R;T nå er definert relativt til I;0*– -teorien T. Det er klart at R* vil være en I;0-modell. Merk imidlertid at G* = G;TUG+ ikke lenger behøver å være en-entydig siden A18 og A19 ikke er aksiomskjemaer i T. Imidlertid vil G;TUG+ være en funksjon. Vi behøver nå bare å vise to ting:

(A) Er F,GêCFml(£(R*)) og G*(F) = G*(G) og har man Fêf*;<m,n>(x;1,...,x;m) der x;1,....,x;mê|R*| så er Gêf*;<m,n>(x;1,...,x;m)

(B) R* := T

For hvis R* tilfredsstiller kravet (A) har vi at R*êMod;(I;0*–)(L) og derfor at R*|L'êMod;(I;0*–)(L). Fra (B) følger at R*|L' := T. Disse to forhold impliserer så det vi ønsker.

Bevis for (A): Anta F,GêCFm(L;(T,C2)) og anta videre at:

(1) G*(F) = G*(G) og

(2) Gê*f**;<m,n>(x;1,...,x;m) der vi forutsetter

(3) x;1,...,x;mê|R*|.

Fra det siste følger at det finnes konstanter c;1,....,c;m slik at x;i = ∂([c;i]) for i=1,...,m. Vi må derfor i lys av (2) ha:

(4) Gê*f**;<m,n>(∂([c;1]),....,∂([c;m]))

Vi skiller nå mellom to hovedtilfeller.

Hovedtilfelle (i): <m,n>ê(NXN–h). Dette innebærer at <m,n> ikke er indeksen til en streng intensjonal operator. Da følger fra (4) og definisjonen av *f**;<m,n> at

(5) Gê*f*;T(<m,n>)(∂([c;1]),....,∂([c;m])) U Z;<m,n>(c;1,...,c;m)

Vi ser på to undertilfelle:

Undertilfelle (i.1): Man har (6) Gê*f*;T(<m,n>)(∂([c;1]),....,∂([c;m])). Da har man

(7) GêCFml(L;T). Vi har derfor at

(8) G*(G) = (G;T U G+)(G) = G;T(G). Man kan nå ikke ha at FêW=(CFml(L;(T,C2))– CFml(L;T)) for i så fall har man G*(F) = G+(F)êC2 og siden G;T(B)êC1 og C1ΩC2=ø ville da følge G*(F)≠G*(G) som strider mot forutsetningen vi nå gjør. Derfor har man at G*(F) = G;T(F) og følgelig i lys av (1) og (8) at G;T(F) = G;T(G). Fra dette følger ved hjelp av definisjonen av G;T at

(9) T :– μ(F) = μ(B). Fra (6) følger:

(10) T :– T;<m,n>(c;1,...,c;m,G) som i lys av A16 og (9) gir en

T :– T:<m,n>(c;1,...,c;m,F). Men dette impliserer at FêGê*f*;T(<m,n>)(∂([c;1]),....,∂([c;m])) Inkl *f**;<m,n>(x;1,...,x;m) som er det vi ønsker.

Undertilfelle (i.2): Man har (11) GêZ;<m,n>(c;1,....,c;m). I lys av definisjonen av Z;<m,n> følger det da at det finnes en konstant cêConst(L) slik at

(12) G ê(G+);-1"({∂([c;)})

(13) T :– t;<m,n>(c;1,...,c;m,c) og

(14) ¬(EF)(FêCFml(L) & T :– (c = μ(F)) & T :– T;<m,n>(c;1,...,c;m,F))

Fra (12) følger GêW og at G*(G) = G+(G). Siden G*= G;TUG+ og G*(F) = G*(G) følger at G+(F) = G+(G) = ∂([c]). Vi har derfor FêG+);-1"({∂([c;)}) som sammen med (13) og (14) og definisjonen av "Z;<m,n>" impliserer:

FêZ;<m,n>(c;1,...,c;m) Inkl *f**;<m,n>(∂([c;1]),....,∂([c;m])) som er det vi ønsker.

Hovedtilfelle (ii): <m,n>êh. Man har altså at <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator. Da har vi fra (4) og definisjonen av "*f**;<m,n>" når <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator at

(15) Gê *f*;T(<m,n>)(∂([c;1]),...,∂([c;m]) U Z:<m,n>(c;1,...,c;m)UÆ;<m,n>(c;1,...,c;m)

Vi må nå undersøke tre undertilfelle:

Undertilfelle (ii.1): Gê*f*;T(<m,n>)(∂([c;1]),...,∂([c;m]). I dette tilfellet blir beviset nøyaktig som ved Undertilfelle (i.1) ovenfor.

Undertilfelle (ii.2): Man har (16) GêÆ;<m,n>(c;1,...,c;m). I lys av definisjonen av "Æ;<m,n>" har man da at det finnes en formel HêCFml(L) og en konstant cêConst(L) slik at

(17) G = g;T(H)

(18) T :– t;<m,n>(c;1,...,c;m,c)

(19) T :– c = μ(H)
(20) ¬(T :– H)

Fra (17) følger at man må ha (21) T:– μ(G) =μ(H). Men det følger også fra (17) at (22) GêCFml(£;T). Derfor har man i lys av (1) at G;T(F) = G;T(G), og følgelig at T:– μ(F)=μ(G), noe som i lys (19) og (21) impliserer T :– c=μ(F). Fra dette og (18) følger:

(23) T :– t;<m,n>(c;1,...,c;m,μ(F))

Undertilfelle (ii.2.1): ¬(T:– F). Fra dette, (18), det at T :– c=μ(F), samt det forhold at FêCFml(£;T) og g;T(F) =F, kan man slutte, i lys av definisjonen av Æ;<m,n> at

FêÆ;<m,n>(c;1,...,c;m) Inkl *f**;<m,n>(c;1,...,c;m) som er det vi ønsker.

Undertilfelle (ii.2.2): T:– F. Dette og (23) gir en T :– T;<m,n>(c;1,...,c;m,F) i lys av A21. Men da, siden FêCFml(£;T) og man derfor har g;T(F)=F, følger:

F = g;T(F) ê*f*;T(<m,n>)(∂([c;1]),....,∂([c;m]) Inkl *f**;<m,n>(x;1,...,x;m)

Undertilfelle (ii.3): GêZ;<m,n>(c;1,...,c;m). Da finnes det en konstant cêConst(L) slik at

(24) G ê(G+);-1"({∂([c;)})
(25) T :– t;<m,n>(c;1,...,c;m,c) og
(26) ¬(EF)(FêCFml(L) & T :– (c = μ(F)) & T :– T;<m,n>(c;1,...,c;m,F))

Fra (24) følger GêW og at G*(G) = G+(G). Siden G*= G;TUG+ og G*(F) = G*(G) følger at G+(F) = G+(G) = ∂([c]). Vi har derfor FêG+);-1"({∂([c;)}) som sammen med (25) og (26) og definisjonen av "Z;<m,n>" impliserer:

FêZ;<m,n>(c;1,...,c;m) Inkl *f**;<m,n>(∂([c;1]),....,∂([c;m])) som er det vi ønsker.

I alle tilfellene har vi vist Fê*f**;<m,n>(x;1,....,x;m). Dette avslutter beviset for (A). For å bevise (B) er det tilstrekkelig å godtgjøre:

(C) Anta FêCFml(L) , têCTerm(L) og cêConst(L). Da gjelder:
(a) R*(F) = 1 <–> T :– F
(b) R*(t) = ∂([c]) <–> T :– (t=c).

(C) blir bevist på nøyaktig samme måte om (4) i beviset for Teorem 9.1.2 i §9.1. Faktisk kan man overta formuleringene fra det beviset som gis for påstanden (4) i §9.1 uten forandringer. Vi anser dermed (C) for etablert. Dette avslutter beviset for Teorem 9.2.2. **Q.E.D.**

§9.3 Om systemet I:0–.

Vi skal nå se på systemet I;0–. Vi kaller klassen av alle de I;0-modellene R for L der man for det første har at:

(1) X;(R,L)Ω*f*;<m,n>(R)(x;1,....,x;m) Inkl Tr;(L,R) om <m,n>êh & x;1,...,x;mê|R|

og som for det andre oppfyller det følgende krav:

(2) F,HêCFml(£(R)) & G(R)(F)=G(R)(H) &
Fê*f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;m) –> Hê*f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;m)

for Mod;(I;0–)(L). Som tidligere er det en enkel øvelse å verifisere at Ax(I;0–, L) Inkl Val;L(Mod;(I;0–)(L)). Derfor har man at det følgende gyldighetsteorem holder:

Teorem 9.3.1 La T = ß(Δ,I;0–,L) være en I;0– -teori i L. Anta RêMod;(I;0–)(L) og ar R:= Δ. Da har man at R:= T.

For I;0– gjelder også det følgende kompletthetsteorem:

Teorem 9.3.2 Anta T' = ß(Δ', I;0–, L') er en konstitent I;0– -teori i L. Da finnes det en modell RêMod;(I;0–)(L) som er slik at R:= T.

Bevis: Vi utvider T' til en komplett Henkin-teori T = ß(Δ,I;0–,L) der L er en utvidelse av L' med spesielle konstanter og der Δ' Inkl Δ. Δ–Δ' inneholder alle de spesielle aksiomene for de spesielle konstantene i L. Vi definerer så R;T og R* nøyaktig som i beviset for Teorem 2.1, §2, Kapittel IV i Rognes [1]. Det er da klart at R*êMod;(I;0)(L). At man har

(1) X;(R*,L)Ω*f*;<m,n>(R*)(x;1,....,x;m) Inkl Tr;(L,R*) om <m,n>êh & x;1,...,x;mê|R*| er også klart siden vi kan vise at R*:=T og at R*(F) =1 hvis og bare hvis T:–F om F er en lukket formel i L. Dette skjer på nøyaktig samme måte som i beviset for det nevnte teorem.

Det gjenstår da bare å godtgjøre at R* også tilfredstiller kravet (2) ovenfor. Dette skjer på samme måte som i beviset for Teorem 9.2.2 i §9.2. Faktisk behøver man bare å benytte seg av det som står i forbindelse med Hovedtilfelle (i), siden vi ikke nå definerer *f**;<m,n>(x;1,...,x;m) på noen spesiell måte. slik som i beviset for Teorem 9.2.2, når <m,n>êh. Vi anser dermed Teorem 9.3.2 som bevist. **Q.E.D.**

§10 Om sterk og svak kompletthet til systemer som er svakere enn I:0

Vi har nå vist kompletthet for systemene I;0*, I;0*– og I;0–. Man kan nå være interessert i å forbedre disse fullstendighetsresultatene på samme måte som ved systemet I;0. I denne forbindelse betrakter vi først systemet I;0*.

Definer "Norm*;(I;0)(L)" ved:

Norm*;(I;0)(L) = Mg(R: RêSem;(I;0*)(L) & Cor(G(R)))

Norm*+;(I;0)(L) er klassen av alle de RêNorm*;(I;0)(L) der X;(R,L) = CFml(£(R)). Vi har åpenbart at at:

Norm*+;(I;0)(L) SInkl Norm*;(I;0)(L) SInkl Sem;(I;0*)(L)

Man kan nå vise:

Teorem 10.1 La T være en konsisten I;0*-teori i L. Da finnes en RêNorm*;(I;0)(L) slik at R:= T.

Dette innebærer at I;0* er såvel sterkt som svakt komplett med hensyn på modellklassen Norm*;(I;0)(L). Man kan i denne forbindelse sammenligne med Teorem 8.3 i §8.

Man kan også vise:

Teorem 10.2 Anta L er et I;0-språk og at h er et spesielt predikatpar av grad ≥1. Anta Δ Inkl Fml(L) og at

(1) UN(Mg(C;F : FêΔ)) Inkl (Spes(L;-1) – {(h);0,(h);1})

La T =ß(Δ,I;0*,L) være en konsistent I;0*-teori i L. Da gjelder:

(ER)(Rê Norm*+;(I;0)(L) & R:= T).

Fra Teorem 10.2 følger umiddelbart:

Korollar 10.3 Anta L er et I;0-språk. Da gjelder:
Th(I;0*,L) = Val;L(Norm*+;(I;0)(L))

Vi kan også meget lett bevise det følgende teorem som viser at I;0* ikke kan være sterkt fullstendig med hensyn på modellklassen Norm*+;(I;0)(L):

Teorem 10.4 Det finnes en konsistent I;0*-teori T i L slik at
¬(ER)(RêNorm*+;(I;0)(L) & R:= T)

I forbindelse med systemene I;0*– og I;0– kan man også bevise lignende teoremer.
Det kan være hensiktsmessig å se på systemet I;0*– først. Vi setter:
Mod+;(I;0*–)(L) = Mg(R : RêMod;(I;0*–)(L) & X;(R,L) = CFml(£(R)).
Man kan nå bevise:

Teorem 10.5 Anta L er et I;0-språk og at h er et spesielt predikatpar av grad ≥1. Anta Δ Inkl Fml(L) og at
(1) UN(Mg(C;F : FêΔ)) Inkl (Spes(L;-1) – {(h);0,(h);1})
La T =ß(Δ,I;0*–,L) være en konsistent I;0*– -teori i L. Da gjelder:
(ER)(Rê Mod+;(I;0*–)(L) & R:= T).

Merk at det likevel kan finnes konsistente I;0*– -teorier i L som ikke har noen modell i Mod+;(I;0*–)(L).

La oss så se på I;0–. Definer "Mod+;(I;0–)(L)" ved:
Mod+;(I;0–)(L) = Mg(R: RêMod;(I;0–)(L) & X;(R,L) = CFml(£(R))
Det skulle være klart at Mod+;(I;0–)(L) SInkl Mod;(I;0–)(L).
Nå kan man bevise:

Teorem 10.6 Anta L er et I;0-språk. Anta F;0êTaut(L) og dessuten at Grad(«F;0»)≥1. La h = <P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F;0)», P«μ(F;0)»>.
Anta Δ Inkl Fml(L) og at
(1) UN(Mg(C;F : FêΔ)) Inkl (Spes(L;-1) – {(h);0,(h);1})
La T =ß(Δ,I;0–,L) være en konsistent I;0– -teori i L. Da gjelder:
(ER)(Rê Mod+;(I;0–)(L) & R:= T).

Fra Teorem 10.5 og Teorem 10.6 har vi at de følgende korollarer holder:

Korollar 10.7 Anta L er et I;0-språk. Da gjelder:
Th(I;0*–,L) = Val;L(Mod+;(I;0*–)(L))

Dessuten:

Korollar 10.8 Anta L er et I;0-språk. Da gjelder:
Th(I;0–,L) = Val;L(Mod+;(I;0–)(L))

Vi skal ikke gi noe detaljert bevis for noen av satsene 10.1 – 10.8. Vi skal imidlertid skissere bevisene.

For å bevise Teorem 10.2 er det nødvendig å redefinere R;-1. Som tidligere i Definisjon 4.2 i §4 setter vi:

(1) R;-1(P«μ(F)») = Mg(<x,y;1,....,y;n>: x= G(R)(«g(R)(F)»[f(R)(y;1),....f(R)(y;n)])

i det vi antar at matrisen «F» er av grad n. Imidlertid må
R;-1(P«T;<m,n>(x;1,....,x;m,F)») defineres på ny. Er <m,n> ê(NXN–h) lar vi
R;-1(P«T;<m,n>(x;1,....,x;m,F)») være definert som i §4. Er imidlertid <m,n>êh må vi kreve:

(2) R;-1(P«T;<m,n>(x;1,....,x;m,F)») =
Mg(<x;1,....,x;m,y;1,....y;n>:
«g(R)(F)»[f(R)(y;1),....f(R)(y;n)]ê*f*;<m,n>(R)(x;1,....,x;m) &
R;-1(X;w(«F»[n(y;1),....,n(y;n)]))=1)

Med denne modifikasjonen av R;-1 er det lett å se at Lemma 4.2 i §4 fremdeles holder.

Vi må også redefinere hva som menes med en normal første-ordens struktur for L;-1. I det vesentlige er en slik definert som tidligere, men er <m,n>êh må man kreve at:

(3) <x;1,...,x;m,y;1,...,y;q>êR(P«T;<m,n>(x;1,....,x;m,F)») <–>
<x;1,...,x;m, Y>êR(t;<m,n>) & R(X;w(«F»[n(y;1),....,n(y;q)]) = 1
der: Y = W;(L;-1,R)(«g;(L;-1,R)(F)»[f;(L;-1,R)(y;1),...,f;(L;-1,R)(y;q)]) og vi forutsetter at «F» er av grad q.

Er <m,n>ê(NXN – h) lar vi R(P«T;<m,n>(x;1,....,x;m,F)») være definert som før. Vi kan nå bevise Lemma 4.3 omtrent som tidligere. Når det gjelder beviset for Teorem 10.2 følger dette i hovedtrekkene bevist for Teorem 5.1. Vi starter med en RêSem;(I;0*)(L) som er slik at R:= Δ. Vi betrakter R;-1 og skal så konstruere R*. For å kunne definere denne antar vi at CFml(£;(L:-1,R*) = X;(R,L), g;(L;-1,R*) = g(R) og at f;(L;-1,R*) = f(R), noe vi åpenbart må ha lov til. Vi må dernest definere W;(L;-1,R*). Vi definerer W(Q) for QêUN(Mg(C;F : FêΔ)) ΩSpes;1(L;-1) som i beviset for Teorem 5.1. Dernest setter vi:

W* = UN(Mg(W(Q): QêUN(Mg(C;F : FêΔ)) ΩSpes;1(L;-1)))

Vi må ha at CFml(£(R)) – Dom(W*) er en tellbart uendelig mengde. Videre må man ha at R(U) – Rgn(W*) er en tellbart uendelig mengde. Dette innebærer at det finnes en korrelajon W+ mellom CFml(£(R)) – Dom(W*) og
R(U) – Rgn(W*). W;(L;-1,R*) kan så defineres ved at man setter:

W;(L;-1,R*) = W*U W+

Man kan så vise uten spesielle vanskligheter, med de relevante passasjer i Teorem 5.1 som forbilde, at W;(L;-1,R*) er en korrelasjon.

Definisjonen av R* fullføres ved at man setter R*(u) = R;-1(u) om uêUN(Mg(C;F : FêΔ)) eller om u er et ikke-logisk symbol i L, eller om u er t;<m,n> eller U. Er ¬(uêUN(Mg(C;F : FêΔ))), men likevel uêSpes(L;-1) defineres R*(u) som i beviset for Teorem 5.1. Ettersom vi å har fullført konstruksjonen av R* kan R*;-2 anses som gitt. Det er nå ikke forbundet med spesielle vanskeligheter å vise at R*;-2êNorm*+;(I;0)(L). Beviset kan så avsluttes på samme måte som beviset for Teorem 5.1

Beviset for Teorem 10.2 krever at man må bevise at R* er en normal første-ordens struktur for L;-1. Dette innebærer at man blandt annet må vise at kravet (3) ovenfor er oppfylt av R*. Dette er imidlertid likefrem og kan trygt overlates til leseren. Dette avslutter vår skisse av beviset for Teorem 10.2.

Korollar 10.3 er en umiddelbar følge av Teorem 10.2 ogskulle neppe kreve noen utstrakte kommentarer.

Beviset for Teorem 10.1 er i hovedsaken nøyaktig som beviset for Teorem 8.3, men med visse opplagte modifikasjoner. Igjen vil det føre for langt å skrive ut dette beviset i detalj. Vi overlater dette som en øvelse til leseren.

Angående Teorem 10.4 er det nokså åpenbart, om man setter

$$\Delta = \{Uc\}\ U\ Mg(\neg(c=\mu(F)) : F\hat{e}Fml(L))$$

og betrakter T= ß(Δ,I;0*,L) at T er en konsistent I;0*-teori i L og at T ikke har noen modell i Norm*+;(I;0)(L). Dette innses ved et resonnement som i det vesentlige er som i beviset for Korollar 5.2.1 i §5

Vi skisserer nå beviset for Teorem 10.5. Er RêRê Mod;(I;0*–)(L) redefinerer vi R;-1 nøyaktig som i beskrevet ovenfor. Lemma 4.2 holder fremdeles siden vi ikke bruker noen opplysninger om G(R) i beviset for denne satsen. Likeledes redefinerer vi hva som menes med en normal første-ordens struktur for L;-1 på den måten som ble forklart ovenfor i forbindelse med systemet I;0*. Det eneste unntaket nå er at vi ikke krever at W;(L;-1,R) ikke nødvendigvis skal være en korrelasjon, men bare en funksjon fra CFml(£;(L;-1,R) over i R(U). Vi krever også at Rgn(W;(L;-1,R)) = R(U). Vi definerer så R;-2 når R er en normal første-ordens struktur for L;-1 som i §4. Det skulle da være klart at R;-2 er et element i Mod+;(I;0*–)(L). Merk at vi under behandlingen av dette systemet bruker (2) og (3) ovenfor når <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator.

Beviset er nå omtrent som ved de systemene vi tidligere har behandlet. I følge Teorem 9.2.2 finnes en RêMod;(I;0*–) slik at R;= Δ. Vi ser så på R;-1. Denne strukturen skal omformes til en struktur R*. Vi definerer W(Q) for hvert Q som er med i UN(Mg(C;F: FêΔ))Ω Spes;1(L;-1) som tidligere og setter

$$W^* = UN(Mg(W(Q): Q\hat{e}UN(Mg(C;F : F\hat{e}\Delta))\ \Omega Spes;1(L;-1)))$$

Det er da lett å vise at W* er en funksjon og at

$$Cd(CFml(£(R)) – Dom(W^*)) = Aleph;0$$

Nå har man at Rgn(W*) kan være identisk med R;-1(U), i alle tilfelle er Rgn(W*)≠ø. I tilfelle R(U) – Rgn(W*)≠ø lar vi G+ være en funksjon slik at Rgn(G+) = (R(U)– Rgn(W*)) og Dom(G+) = CFml(£(R)) – Dom(W*). Vi kan finne en slik funksjon siden Cd(Dom(G+)) = Aleph;0 og R er er tellbart uendelig. Er imidlertid R(U)–Rgn(W*) = ø lar vi Rgn(G+) være inkludert i Rgn(W*). Man er nå forsikret om at W*UG+ er en funksjon fra CFml(£(R)) over i R(U). Vi kan som før anta at CFml(£;(L;-1,R*)) = X;(R,L), g;(L;-1,R*) = g(R) og at f;(L;-1,R*)= f(R). Man kan så fullføre definisjonen av R* ved å sette at R*(u) = R(u) om u er et ikke-logisk symbol i L, t;<m,n>, U eller et element i UN(Mg(C;F: FêΔ)). Er uê(Spes(L;-1) –UN(Mg(C;F: FêΔ))) lar vi R*(u) være definert som i beviset for Teorem 5.1. Det er nå ikke vanskelig å vise at R* er en normal første-ordens struktur for L;-1. Beviset kan så avsluttes etter samme mønster som beviset for Teorem 5.1.

Beviset for Teorem 10.6 krever litt mer omtanke. Men kan i hovedsaken konstrueres etter møster av beviset for Teorem 7.1 i §7. Vi definerer R;-1 som ved Definisjon 4.2 i §4. Når det gjelder begrepet "normal første-ordens struktur for L;-1" defineres det som ved Definisjon 4.3 i §4 bortsett fra at vi nå ikke krever at W;(L;-1,R) skal være en korrelasjon, men bare en funksjon. Definisjonen kan nå formuleres slik:

La L være et I;0-språk og R en første-ordens struktur for L;-1. Vi sier at *R er en normal første-ordens struktur for L;-1* hvis og bare hvis det finnes en funksjon W;(L;-1,R) som avbilder CFml(£;(L;-1,R) på R(U), og som er slik at:

(i) $R(P«\mu(F)») = Mg(<x,y;1,...,y;n> \ \&$

x= W;(L;-1,R)(«g;(L;-1,R)(F)»[f;(L;-1,R)(y;1),...,f;(L;-1,R)(y;1)])

i det vi antar at «F» er av grad n

(ii) <x;1,...,x;m,y>êR(t;<m,n>) –> yêR(U)

(iii) <x;1,...,x;m,y;1,...,y;q>êR(P«T;<m,n>(x;1,....,x;m,F)») <–> <x;1,...,x;m, Y>êR(t;<m,n>) der:

Y = W;(L;-1,R)(«g;(L;-1,R)(F)»[f;(L;-1,R)(y;1),...,f;(L;-1,R)(y;q)])

i det vi forutsetter at «F» er av grad q.

La oss så gå over til detaljene i beviset for Teorem 10.6:

Siden T = ß(Δ, I;0–,L) er en konsistent I;0– -teori finnes det i følge Teorem 9.3.2 en RêMod; (I;0–)(L) som er slik at R:= Δ.

Vi betrakter <R;-1,L;-1>. Vi skal modifisere R;-1 til en normal første-ordens struktur for L;-1. Denne modifikasjonen av R;-1 betegnes med "R*". Denne defineres på følgende måte:

(i) |R*| = |R;-1|

(ii) *(R*) = *(R;-1)

(iii) R*(u) = R;-1(u) om u enten er en singulær term i snever forstand, en konstant eller et n-ært predikat i L. Vi har derfor at R*(u) = R(u) for ikke-logiske symboler u i L av denne art.

Siden |R*| og L er fiksert er også £;(L;-1,R*), *f*;(L;-1,R*) og g;(L;-1,R*) fiksert. Fra beviset for fullstendighetsteoremet for I;0 fremgår det også at vi kan anta:

(4) X;(R,L) = CFml(£;(L;-1,R*))

(5) f(R) = f;(L;-1,R*)

(6) g(R) = g;(L;-1,R*)

Vi skal derfor fra nå av arbeide med uttrykkene "X;(R.L)", "f(R)" og "g(R)" i stedet for de mer kompliserte uttrykkene til høyre i identitetene (4) – (6). Vi setter videre:

(iv) R*(U) = R;-1(U)

(v) R*(t;<m,n>) = R;-1(t;<m,n>)

Det gjenstår nå bare å definere R*(s) om s er et spesielt predikat i L;-1.

La QêSpes;1(L;-1). Da har man Q= P«μ(G)» for en eller annen formel G i L. Vi har at «G» er av grad m for noe m≥0. Vi definerer da W;(R,Q) ved å sette:

(7) <«g(R)(G)»[f(R)(y;1),...,f(R)(y;m)],x>êW;(R,Q) <–> <x,y;1,...,y;m>êR;-1(Q)

Videre definerer vi:

(8) W;(Δ,R) = UN/QêUN(Mg(C;F : FêΔ))ΩSpes;1(L;-1)/(W;(R,Q))

Nå skulle det ikke være noen spesielle vanskeligheter med å vise:

(9) W;(Δ,R) er en funksjon.

(10) W;(Δ,R) Inkl G(R)Ω(|R|X X;(R,L))

(11) Cd(CFml(£;(L;-1,R)) – Dom(W;(Δ,R))) = Cd(X;(R,L) – Dom(W;(Δ,R))) = Aleph;0.

Vi definerer nå:

(vi) S;<m,n>(R)(x;1,...,x;m) = Mg(y: <x;1,...,x;m,y>êR(t;<m,n>))

(vii) S;<m,n>(2R) = UN/<x;1,...,x;m>ê|R|^m/(S;<m,n>(R)(x;1,...,x;m))

(viii) S(3R) = UN/<m,n>êE/(S;<m,n>(2R))

Man ser at yêS(3R) hvis og bare hvis det finnes <m,n>êE (E er indeksmengden for de strenge intensjonale operatorene i L) og det finnes x;1,...,x;mê|R| slik at <x;1,...,x;m,y>êR(t;<m,n>).

Vi betrakter q;(Δ,R) definert ved:

(12) q;(Δ,R) = (S(3R) – Rgn(W;(Δ,R)))

Denne mengden q(Δ,R) kan være endelig eller uendelig. Den kan også være tom. Vi setter Y(R) = Mg(«g(R)(F;0)»[f(R)(y;1),...,f(R)(y;t)] : y;1,...,y;tê|R[) i det vi antar at F;0 (som er nevnt i forutsetningene i Teorem 10.6) er av grad t>1. Det skulle være klart i lys av forutsetningene at:

(16) Y(R)ΩDom(W;(F,R)) = ø.

La nå F være en funksjon der Rgn(F) = q;(Δ,R) og der Dom(F) = Y(R). En slik funksjon finnes siden Y(R) er tellbart uendelig og q;(Δ,R) er høyest tellbart uendelig. Er q;(Δ,R) tom lar vi F være den tomme funksjonen. Man har da:

(17) W+;(Δ,R) = W;(Δ,R)UF er en funksjon.

(18) Cd(X;(R,L) – Dom(W+;(Δ,R))) = Aleph;0

(19) ø≠ Cd(R(U) – Rgn(W+;(Δ,R))) ≤ Aleph;0

Fra (18) og (19) følger det at det finnes en funksjon V som avbilder X;(R,L) – Dom(W+;(Δ,R)) på R(U) – Rgn(W+;(Δ,R)). Vi definerer:

(20) W°;(Δ,R) = W+;(Δ,R) U V.

Vi må åpenbart ha at W°;(Δ,R) er en funksjon.

Det er etter disse forberedelsene mulig å gjøre definisjonen av R* fullstendig.

(ix) Er uêUN(Mg(C;F : FêΔ)) setter man R*(u) = R;-1(u)

(x) Er uê(Spes;1(L;-1) – UN(Mg(C;F : FêΔ)) har vi at u = P«μ(G)» for noe GêFml(L) der vi kan forutsette at G er av grad n≥0. Vi setter da:
R*(P«μ(G)») = Mg(<x,y;1,...,y;n>:
x = W°(F,R)(g(R)(G)[f(R)(y;1),...,f(R)(y;n)])

(xi) Er uê(Spes;2(L;-1) – UN(Mg(C;F : FêΔ))) har vi at u = P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,G)» for noe GêFml(L) der vi kan forutsette at G er av grad n≥0. Da setter man:
R*(P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,G)») = Mg(<x;1,...,x;m,y;1,....,y;n>:
<W°(F,R)(g(R)(G)[f(R)(y;1),...,f(R)(y;n)],x;1,...,x;m>êR;-1(t;<m,n>))

Dermed er R* fullstendig definert. Ved et enkelt og trivielt induksjonsbevis på lengden av velformede uttrykk kan man vise:

(21) Anta GêCFml(L;-1(|R;-1|)) og at têCTerm(L;-1(|R;-1|)). Anta Spes[G] Inkl UN(Mg(C;F : FêΔ)) og Spes[t] Inkl UN(Mg(C;F : FêΔ)). Da gjelder:

(a) R;-1(G) = R*(G)

(b) R:-1(t) = R*(t)

På samme måte som i beviset for Teorem 5.1 kan man vise:

(22) R* er en normal første-ordens struktur for L;-1.

Dette innebærer i lys av definisjonen av R*;-2 at vi vil ha R*;-2êMod+;(I;0–)(L) om man kan vise:

(23) *f*;<m,n>(R*;-2)(x;1,...,x;m) Inkl Tr;L(R*;-2) om <m,n>êE og x;1,...,x;mê|R*;-2|

La oss gi et bevis for (23): Anta Gê*f*;<m,n>(R*;-2)(x;1,...,x;m) og anta

(24) x;1,...,x;mê|R*;-2| & <m,n>êE. Etter definisjonen av "*f*;<m,n>(R*;-2)" har man:

(25) <W°;(Δ,R)(G), x;1,...,x;m>êR*(t;<m,n>)

Siden <m,n>êE må man da ha W°;(Δ,R)êS(3R). Vi skiller mellom to tilfeller:

Tilfelle (i): W°;(Δ,R)êq;(Δ,R). Da har man GêY(R). Men vi har åpenbart at Y(R) Inkl Tr;L(R*;-2). Da GêTr;L(R*;-2).

Tilfelle (ii): Anta W°;(Δ,R)(G)êRgn(W;(Δ,R)). Da har vi per definisjon at det finnes et spesielt predikat P«μ(H)»êC;F for noe FêΔ slik at

W°;(Δ,R)(G) = W;(R, P«μ(H)»)(G).

Vi kan anta at graden til «H» er n≥0. Man har da at det finnes y;1,...,y;n i |R| slik at (26)

G = «g(R)(H)»[f(R)(y;1),...,f(R)(y;n)] og slik at:

<W°;(Δ,R)(G), «g(R)(H)»[f(R)(y;1),...,f(R)(y;n)]> êG(R)

Herav: W°;(Δ,R)(G) = G(R)(«g(R)(H)»[f(R)(y;1),...,f(R)(y;n)]). Dette, (25) og det faktum at R*(t;<m,n>) = R;-1(t;<m,n>) = R(t;<m,n>) gir en at

«g(R)(H)»[f(R)(y;1),...,f(R)(y;n)]ê*f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;m)

Siden <m,n>êE har man derfor at

«g(R)(H)»[f(R)(y;1),...,f(R)(y;n)]êTr;L(R) som impliserer, om i;1,...,i;n er navnene på henholdsvis y;1,...,y;n at R(«H»[i;1,....,i;n]) = 1. Det følger ved hjelp av Lemma 4.2 at R;-1(X;w(«H»[i;1,....,i;n])) = 1.

Nå har man siden P«μ(H)»êC;F at

Spes[X;w(«H»[i;1,...,i;n])] = Spes[X;w(G)] Inkl C;F. Derfor har man i lys av (21):

R*(X;w(«H»[i;1,...,i;n])) =1

Da har man imidlertid ved hjelp av Lemma 4.3 at R*;-2(X;w(«H»[i;1,...,i;n]))=1. I lys av det faktum at:

g(R)(«H»[i;1,...,i;n]) = g(R*;-2)(«H»[i;1,...,i;n]) =
= «g(R*;-2)(H)»[f;(R*;-2)(¢(i;1)),...., ;(R*;-2)(¢(i;n))][2]
= «g(R)(H)»[f(R)(y;1),...,f(R)(y;n)] = G

følger det at GêTr;L(R*;-2) som er det vi ønsker. Dette avslutter vårt bevis for (23). Vi kan nå avslutte beviset :

Fra (22) og (23) følger at R*;-2êMod+;(I;0–)(L). I lys av (21) skulle det ikke være vanskelig å se at R*;-2 := Δ og derfor at R*;-2 := T. Dette avslutter vår redegjørelse for beviset for Teorem 10.6

§11 Forbedring av kompletthetsteoremene for I:0[Ç] og I:0[∑,Ç]

I kapittel V i Rognes [1] definerte vi uttrykket "a er et indekssytem over klassen av I;0-språk I" og dessuten uttrykket "Ç er en systemkarakteristikk over klassen av I;0-språk I". Uttrykket "Ç er en tillatt systemkarakteristikk over I" ble definert ved å si at Ç er en slik karakteristikk over I hvis og bare hvis man har at de følgede to betingelser er oppfylt:

(i) (AL)(LêI –> Sem;(I;0)(L) ≠ø)

(ii) (AL)(Aa)(LêI & aêÇ –> E(a,L) Inkl Val;L(Sem;(I;0)(Ç,L)))

I §7, Kapittel V, Rognes[1] bevise vi så det følgende teorem:

Teorem A: Anta Ç er en tillatt systemkarakteristikk over I. Anta videre at L,L'êI. Da har man at følgende påstander holder:

(a) La T = ß(Δ,I;0[Ç], L) være en I;0[Ç]-teori i L. Anta RêSem;(I;0)(Ç,L) og at R:= Δ. Da har man at R:= T.

(b) Anta T' = ß(Δ',I;0[Ç], L') er en konsistent I;0[Ç]-teori i L'. Da finnes det en modell R'êSem;(I;0)(Ç,L') slik at R' := T'.

Ved hjelp av metoden som ble brukt i beviset for Teorem 8.3 i §8 kan man nå forbedre dette resultatet noe. Definer:

Sem+;(I;0)(Ç.L) = Sem;(I;0)(Ç,L)ΩNorm;(I;0)(L)

---

[2] ¢(i), hvor i er et navn, betegner det objektet som i er et navn på.

La oss dessuten kalle Ç for en svakt tillatt systemkarakteristikk over I hvis og bare hvis man har:

(AL)(Aa)(LêI & aêÇ –> E(a,L) Inkl Val;L(Sem;(I;0)(Ç,L)))

De forbedrede vrsjonen av teoremet ovenfor ka da formuleres slik:

Teorem 11.1 La Ç være en svakt tillatt systemkarakteristikk over I. Anta L,L'êI. Da gjelder følgende to påstander:

(a) La T = ß(Δ,I;0[Ç], L) være en I;0[Ç]-teori i L. Anta RêSem+;(I;0)(Ç,L) og at R:= Δ. Da har man at R:= T.

(b) Anta T' = ß(Δ',I;0[Ç], L') er en konsistent I;0[Ç]-teori i L'. Da finnes det en modell R'êSem+;(I;0)(Ç,L') slik at R' := T'.

Forå bevise denne satsen er det tilstrekkelig å bevise Lemma 11.1 og Lemma 11.2 nedenfor. Disse kan forøvrig sammenlignes med Lemma 8.1 og Lemma 8.2.

Lemma 11.2 La Ç være en svakt tillatt systemkarakteristikk over I. Anta LêI og at T = ß(Δ, I;0[Ç],L) er en konsistent I;0[Ç]-teori i L. La L' være L utvidet med en tellbart uendelig mengde med nye konstanter k;1,k;2,..... Sett per definisjon:

Δ;i = Mg(¬(k;i=μ(F)) : FêFml(L'))

og definer Δ;u ved:

Δ;u = UN/i,1,∞/(Δ;i)U Mg(U(k;i): iêN} U Mg(k;i≠k;j: i,jêN & i≠j & i,j≥1}

Da er T' = ß(ΔUΔ;u, I;0[Ç],L') en konsistent I;0[Ç]-teori i L'.

Denne hjelpesetningen bevises nøyaktig på samme måte som Lemma 8.1. Den eneste forskjellen er at hvor vi i beviset for Lemma 8.1 i §8 henviser til kompletthetsteoremet for I;0 med hensyn på Sem;(I;=)(L) nå istedefor henviser til Teorem A.

Den neste hjelpesetningen som trengs er:

Lemma 11.3 Anta L'êI og at L' inneholder en tellbart uendelig mengde med konstanter k;1, k;2,...,k;n,... . Sett per definisjon:

Δ;i = Mg(¬(k;i=μ(F)) : FêFml(L'))

og definer Δ;u ved:

Δ;u = UN/i,1,∞/(Δ;i)U Mg(U(k;i): iêN} U Mg(k;i≠k;j: i,jêN & i≠j & i,j≥1}

Anta Ç er en svakt tillatt systemkarakteristikk over I og at T' = ß(Δ,I;0(Ç), L') er en konsistent I;0[Ç]-teori i L' der Δ;u Inkl T'. Da gjelder:

(ER)(RêSem+;(I;0)(Ç,L) & R:= T')

Beviset for denne påstanden kan sies å være en slags "kombinasjon" av beviset for Lemma 8.2 i §8 og beviset for Teorem A i Rognes [1]. Vi utvider først T' til en komplett Henkin-teori T. På samme måte som i beviset for Lemma 8.2 konstruerer vi en struktur R*. Denne vil være en I;0-modell. Som i beviset for Lemma 8.2 kan man vise at R*êNorm;(I;0)(L) der L er en utvidelse av L' med spesielle konstanter. Det er så greit å vise at R*:= T. Det gjenstår så bare å påvise at R*êSem;(I;0)(Ç,L). Dette gjøres imidlertid som i beviset for Teorem 7.1 i Rognes [1], §7, Kapittel V. Disse bemerkningene skulle være tilstrekkelige. Leseren burde på dette grunnlag selv kunne skrive ut beviset i detalj.

I Kapittel VII, §5 i Rognes [1] ble det bevist et teorem som kan oppfattes som en generalisering av Teorem A, nemlig Teorem 5.1. Vi skal nå se at også dette teoremet kan forbedres.

I resten av denne paragrafen skal vi bruke uttrykket "spesielt predikat" i den betydningen som ble forklart i Kapittel VII i det nevnte arbeid, og følgelig ikke i den betydningen vi har brukt det hittil, nemlig som fellesbetegnelse for predikater av typen "P«F»" og "P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F)»". Dessuten merker vi oss at I;0-språkene nå inneholder en tellbart uendelig mengde med slike spesielle predikater indeksert på N;1XN;1.[3] Disse spesielle predikatene regnes som logiske symboler. (Se Rognes [1], Kapittel VII, §1)

Uttrykkene "[∑,Ç] er et L-system over I" og "[∑,Ç] er et tillatt L-system over I" defineres som tidligere. Vi benytter oss av den følgende definisjon:

Sem+;(I;0)([∑,Ç]) = Sem;(I;0)([∑,Ç]) Ω Norm;(I;0)(L).

Den forbedrede versjonen av Teorem 5.1, §1, Kapittel VII i Rognes [1] kan da formuleres slik:

Teorem 11.4 Anta [∑,Ç] er et tillatt L-system over I. Anta videre at L,L'êI. Da har man at følgende påstander holder:

(a) La T = ß(Δ,I;0[∑,Ç], L) være en I;0[∑,Ç]-teori i L. Anta RêSem+;(I;0)([∑,Ç],L) og at R:= Δ. Da har man at R:= T.

(b) Anta T' = ß(Δ',I;0[∑,Ç], L') er en konsistent I;0[∑,Ç]-teori i L'. Da finnes det en modell R'êSem+;(I;0)([∑,Ç],L') slik at R' := T'.

Dette teoremet følger fra de to hjelpesetningene nedenfor:

Lemma 11.5 La [∑,Ç] være et tillatt L-system over I. Anta LêI og at T = ß(Δ, I;0[∑,Ç],L) er en konsistent I;0[∑,Ç]-teori i L. La L' være L utvidet med en tellbart uendelig mengde med nye konstanter k;1,k;2,..... Sett per definisjon:

Δ;i = Mg(¬(k;i=μ(F)) : FêFml(L'))

og definer Δ;u ved:

Δ;u = UN/i,1,∞/(Δ;i)U Mg(U(k;i): iêN} U Mg(k;i≠k;j: i,jêN & i≠j & i,j≥1}

Da er T' = ß(ΔUΔ;u, I;0[∑,Ç],L') en konsistent I;0[∑,Ç]-teori i L'.

Denne hjelpesetningen har et bevis som i det vesentlige har den samme struktur som beviset for Lemma 8.1 i §8.

Lemma 11.6 Anta L'êI og at L' inneholder en tellbart uendelig mengde med konstanter k;1, k;2,...,k;n,... . Sett per definisjon:

Δ;i = Mg(¬(k;i=μ(F)) : FêFml(L'))

og definer Δ;u ved:

Δ;u = UN/i,1,∞/(Δ;i)U Mg(U(k;i): iêN} U Mg(k;i≠k;j: i,jêN & i≠j & i,j≥1}

Anta [∑,Ç] er et tillatt L-system over I og at T' = ß(Δ',I;0[∑,Ç], L') er en konsistent I;0[∑, Ç]-teori i L' der Δ;u Inkl T'. Da gjelder:

(ER)(RêSem+;(I;0)([∑,Ç],L) & R:= T')

Beviset for denne påstanden består i konstruere en normal I;0-modell R* som er en modell for en komplett Henkin-teori T = ß(Δ,I;0[∑,Ç], L) der vi har T' Inkl T og dessuten at L er en utvidelse av L' med nye spesielle konstanter. Konstruksjonen av R* foregår på samme måte som i beviset for Lemma 8.2 i §8. Dernest må man verifisere R*ê Sem;(I;0)([∑,Ç],L). Dette gjøres på samme måte som i beviset for Teorem 5.1 i §5, Kapittel VII i Rognes [1]. Vi overlater utarbeidelsen av detaljene til den interesserte leser.

---

[3] N;1 betegner klassen av de naturlige tall med 0 utelatt. Man har altså N;1 = {1,2,3,.....}

§12 Det degenererte I:0-systemet. Resultater om sterk og svak kompletthet.

Vi skal nå undersøke DegI;0, eller det "degenererte I;0-systemet" som vi også vil kalle det. Kalkylen DegI;0 har de samme aksiomskjemaene som I;0, men med de følgende unntak: (i) Aksiomskjemaene A18 og A19 er utelatt. (ii) Aksiomskjemaet A16 er erstattet med det følgende svakere aksiomskjema:

A16– T;<m,n>(x;1,...,x;m,F) –> t;<m,n>(x;1,...,x;n,μ(F))

Det følgende vil derfor være en fullstendig liste over aksiomskjemaene i DegI;0.

Aksiomskjemaer i systemet DegI;0:

A1 F –> (G –> F)
A2 (F –> (G –>H)) –>((F–>G) –> (F –>H))
A3 ((¬G) –>(¬F)) –> (F –> G)
A4 (Ax)F –> F;x[a] forutsatt at a enten er en konstant eller et variabeltegn i L.
A5 (Ax)(F –> G) –> (F –> (Ax)G) forutsatt at x ikke forekommer fri i F.
A6 (Ax)(x=x)
A7 x = y –> (F –> F') forutsatt at F' er som F unntatt eventuelt ved å ha en fri forekomst av y på et eller flere steder hvor F har en fri forekomst av x
A8 t;1 = r;1& ... & t;m = r;m –> (P(t;1,...,t;m) –> P(r;1,...,r;m)) forutsatt at t;1,...,t;m,r;1,...,r;m er termer i L og P et m-ært predikat i L (m≥1)
A9 t;1 = r;1& ... & t;m = r;m –>
(T;<m,n>(t;1,...,t;m,F) –> T;<m,n>(r;1,...,r;m,F) forutsatt at t;1,...,t;m,r;1,...,r;m er termer i L og F er en m-ært formel i L (m≥0)
A10 P(t;1,...,t;n) –> (Ex)(x= t;i) (i =1,..,n) forutsatt at P er et n-ært predikat i L, t;1,...,t;n termer i L og x ikke forekommer fri i t;i.
A11 T;<m,n>(t;1,...,t;m,F) –> (Ex)(x= t;i) (i =1,..,m) forutsatt at t;1,...,t;n termer i L og x ikke forekommer fri i t;i.
A12 t;1 = r;1& ... & t;n = r;n –> (f(t;1,...,t;n) = f(r;1,...,r;n)) forutsatt at t;1,...,t;m,r;1,...,r;m er termer i L og f et n-ært funksjonssymbol i L (m≥1)
A13 (Ex)(x= f(t;1,....,t;n)) <–> (Ex)(x=t;1) &.... & (Ex)(x=t;n) forutsatt at x ikke forekommer fri i noen av t;1,...,t;n.
A14 (Ay)(y = (ix)F <–> (Ax)(F <–> x=y) forutsatt at y ikke forekommer fri i F
A15 U(μ(F))
A16– T;<m,n>(x;1,...,x;n,F) –> t;<m,n>(x;1,...,x;n,μ(F))
A17 t;<m,n>(x;1,...,x;n,y) –> U(y)
A20 T;<m,n>(x,1,...,x;n,F) –> F forutsatt at <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator.

Slutningsreglene i DegI;0 er de samme som i I;0, dvs. at DegI;0 bare har to slutningsregler: modus ponens og universell generalisering.

Alle de syntaktiske begrepene vi innførte i forbindelse med I;0 innføres på en helt analog måte for systemet DegI;0.[4] Spesielt bemerkes det at vi bruker uttrykket "ß(Δ,DegI;0,L)" for å betegne den minste mengden X Inkl Fml(L) som er slik at:

(i) (Ax(DegI;0,L)UΔ) Inkl X
(ii) X er lukket under modus ponens og universell generalisering.

Vi har tidligere definert modellklassene Mod;(I;0)(L) og Mod*(I;0)(L). Før vi går videre bemerkes det at det følgende gyldighetsteorem holder for DegI;0:

Teorem 12.1 Anta L er et I;0-språk og at T= ß(Δ,DegI;0,L). Anta RêMod;(I;0)(L), eventuelt at RêMod*;(I;0)(L), og at R:=Δ. Da gjelder R:= T.

§ 12.1 Fullstendighetsbevis for DegI:0.

Vi skal bevise det følgende kompletthetsteorem for DegI;0. Siden beviset ville ta uforholdsmessig stor plass om det skulle utpensles i minste detalj innskrenker vi oss til å omtale de vesentlige punktene.

Teorem 12.1.1 La T' = ß(Δ', DegI;0,L') være en konsistent DegI;0-teori i L'. Det finnes da en modell R'êMod;(I;0)(L) slik at R' := T'.

Bevis: Siden T' er en konsisten DegI;0-teori kan den utvides til en komplett Henkin-DegI;0-teori T=ß(Δ, DegI;0,L) som er slik at Δ' Inkl Δ, og der L er en utvidelse av L' med nye spesielle konstanter. Vi konstruerer så en kanonisk modellstruktur m;T der

m;T = <*;T, D;T, f;T,£;T,<*f*;T(<m,n>)>/<m,n>êNXN,G;T>

på samme måte som i fullstendighetsbeviset for I;0. Vi definerer så R;T ved å sette R;T = <m;T,g;T,∏;T>, der L-morfien g;T og valuasjonsfunksjonen ∏;T er definert på samme måte som tidligere. Vi bemerker at G;T er definert slik:

(1) G;T = Mg(< g;T(F),∂([c;]) >: cêConst(L) & FêCFm(L) & T :– (c=μ(F)))

Vi definerer også to andre størrelser, C1 og C2, på samme måte som tidligere:

(2) C1 = Mg(∂([c]) : T :– Uc & (EF)(FêCFml(L) & T :– (c=μ(F))))
(3) C2 = Mg(∂([c]) : T :– Uc & ¬(EF)(FêCFml(L) & T :– (c=μ(F))))

Som man ser er C1 og C2 disjunkte, og siden vi har T:– Uμ(F) for alle FêFml(L) er det lett å vise at:

(4) Rgn(G;T) = C1, og at man har:
(5) Dom(G;T) = CFml(£;T)

Vi har imidlertid ingen garanti for at R;T er en modell for T og derfor at R;T|L' er en modell for T'. Vi skal følgelig, med utgangspunkt i R;T, konstruere en modell R* som faktisk er en modell for T.

Vi definerer en mengde C1* ved å stipulere at ∂([c])êC1* hvis og bare hvis det finnes konstanter c;1,....,c;m i L, og <m,n>êNXN, slik at:

(i) T:– T;<m,n>(c;1,...,c;m,c)
(ii) ∂([c])êC1
(iii) Det finnes ingen formel FêCFml(L) slik at T:– T;<m,n>(c;1,...,c;m,F) og T:– c=μ(F).

---

4 Se i denne forbindelse §1 og §2, Kapittel III i Rognes [1].

Vi skal definere en funksjon G0. Anta C1* er tom. Da lar vi G0 være den tomme mengden. Anta C1* er ikke-tom. Man har at C1* i høyden kan inneholde tellbart uendelig mange konstanter siden L er et tellbart språk. Innfør da for hvert element cêC1* et helt nytt monadisk predikat, P;c, som ikke foreligger i L og kall språket L;T utvidet med disse nye predikatene for L;(T,C1*). Vi har at CFml(L;(T,C1*)) bare inneholder tellbart uendelig mange formler. Videre har man at Cd(CFml(L;(T,C1*)) – CFml(£;T)) = Aleph;0. Vi kan derfor finne en funksjon med CFml(L;(T,C1*)) – CFml(£;T) som domene og C1* som verdiområde. Vi velger ut en slik funksjon og identifiserer G0 med den.

Vi skal også definere en funksjon G+. Anta C2=ø. Da setter vi G+ =ø. Anta på den annen side at C2≠ø. I så tilfelle innfører vi for hver konstant cêC2 et nytt monadisk predikat P;c som ikke er med i L;(T;C1*) og utvider L;(T,C1*) med alle disse nye predikatene til et språk L;(T;C2). Sett per definisjon:

k2 = CFml(L;(T,C2)) – CFml(L;(T,C1*))

k1 = CFml(L;(T,C1*)) – CFml(£;T)

Man har åpenbart at Cd(k2) = Aleph;0. Man kan derfor finne en funksjon med k2 som domene og C2 som verdiområde. Vi velger ut en slik og lar G+ være denne. I det følgende tenker vi oss altså at G+ og G0 er fiksert på denne måten.

Vi definerer:

(6) Z1;<m,n>(c;1,...,c;m) =
Mg(G: (Ec)(∂([c])êC2 & T:– t;<m,n>(c;1,...,c;m,c) &
Gê(G+);-1({∂([c])})))

(7) Z2;<m,n>(c;1,...,c;m) =
Mg(G: (Ec)(∂([c])êC1* & T:– t;<m,n>(c;1,...,c;m,c) &
Gê(G0);-1({∂([c])})))

Vi definerer så en modellstruktur

m* = <*, D*, f*,£*,<*f*;<m,n>>/<m,n>êNXN,G*>

ved å sette:

* = *;T

D* = D;T

f* = f;T

£* = L;(T,C2)

Videre defineres *f**;<m,n> ved at vi setter:

(8) *f**;<m,n>(∂([c;1]),...,∂([c;m])) =
f;T(<m,n>)(∂([c;1]),...,∂([c;m]) U Z1:<m,n>(c;1,...,c;m) U
Z2:<m,n>(c;1,...,c;m)

Tilslutt definerer vi G* ved:

(9) G* = G;T U G0 U G+

Som man ser har man at Dom(G*) = CFml(£(R*)) og at Rgn(G*) = C1UC2. Dessuten er det lett å vise at G*, slik den er konstruert her, er en funksjon.

Tilslutt definerer vi g* ved å sette g*=g;T og ∏* ved å sette ∏*(u) = ∏:T(u) om u er et deskriptivt, ikke-logisk, symbol i L. Man kan nå sette

R* = <m*,g*,∏*>. Merk at vi bruker de samme navnene i de to modellene R;T og R*. Dermed er modellen R* fullstendig definert.

Vi skal nå vise at R:= T. For dette formål er det tilstrekkelig å bevise det følgende lemma:

Lemma 12.1.2 Anta FêCFml(L) og têCTerm(L). Anta c er en konstant i L. Da gjelder:

(i) R*(F) = T <–> T :– F

(ii) R*(t) = ∂([c]) <–> T:– (t=c)

Denne hjelpesetningen bevises ved induksjon på lengden av de velformede uttykkene i L. Induksjonstrinnene i tilfelle F = P(t;1,...,t;n), (¬G), (G–>H), (Ax)G, T;<m,n>(x;1,...,x;m,G) og t;1=t;2 er greie og stort sett som i våre tidligere kompletthetsbevis. Vi overlater derfor disse tilfellene til leseren. Er F = U(t) er også beviset forholdsvis enkelt å gjennomføre siden

Rgn(G*) = C1UC2 = Mg(∂([c]) : cêConst(L) & T :– U(c)).

Det eneste tilfellet som det derfor strengt tatt er nødvendig å gå igjennom detaljert er når F = t;<m,n>(t;1,...,t;m,t;(m+1)). Vi skal bevise det mer spesielle tilfellet der F= t;<m,n>(c;1,...,c;m,c;(m+1)) og overlater utarbeidelsen av det mer generelle tilfellet med termer til leseren.

(a) Anta R*(t;<m,n>(c;1,...,c;m,c)) =1. Da har man at <∂([c;1]),.....,∂([c;m]),∂([c])> êR*(t;<m,n>). Dette innebærer at

(10) ∂([c])êG*"*f**;<m,n>(∂([c;1]),...,∂([c;m]))

Fra dette følger at det finnes en formel G slik at:

(11) ∂([c]) êG*(G)

(12) Gê*f**;<m,n>(∂([c;1]),...,∂([c;m])).

Fra (12) og (8) følger så:

Gê*f*;T(<m,n>)(∂([c;1]),...,∂([c;m]) U Z1:<m,n>(c;1,...,c;m) U Z2:<m,n>(c;1,...,c;m)

Vi skiller mellom tre tilfeller:

Tilfelle (i): Gê*f*;T(<m,n>)(∂([c;1]),...,∂([c;m]). Da har man i lys av definisjonen av *f*;T at T :– T;<m,n>(c;1,...,c;m,G). Fra dette følger så ved hjelp av A16– :

(13) T :– t;<m,n>(c;1,...,c;m,μ(G)). Videre må man ha at GêCFml(£;T) og derfor i lys av (11) og definisjonen av G* at

<∂([c]),G >êG;T. Fra dette følger ved hjelp av definisjonen av G;T:

T :– c =μ(G) som sammen med (13) gir en T :– t;<m,n>(c;1,...,c;m,c). Dette er nettopp hva man ønsker.

Tilfelle (ii): GêZ1:<m,n>(c;1,...,c;m) . I lys av (6) må det da finnes en konstant c' der man har:

(14) ∂([c'])êC2 & T:– t;<m,n>(c;1,...,c;m,c') og

(15) Gê(G+);-1({∂([c'])})

Man må i lys av (15) ha at GêDom(G+), og derfor at GêCFml(L;(T,C2)). Men da følger ved hjelp av (11) at G+(G) = ∂([c]) som sammen med (15) og (14) gir en:

T :– t,<m,n>(c;1,...,c;m,c).

Tilfelle (iii): GêZ2:<m,n>(c;1,...,c;m). I lys av (7) finnes det en konstant c' slik at

(16) ∂([c'])êC1* & T:– t;<m,n>(c;1,...,c;m,c)

(17) Gê(G0);-1({∂([c'])})

Videre må man ha at Gê(CFml(L;(T,C1*) – CFml(£;T)). Men dette, (11), (16) og (17) gir en: T :– c=c' og derfor, i lys av (16), at T:– t;<m,n>(c;1,...,c;m,c) som er det vi ønsker.

I alle tilfelle har vi nå vist at T:– t;<m,n>(c;1,...,c;m,c) holder.

(b) Anta på den annen side at T:– t;<m,n>(c;1,...,c;m,c) for å vise at R*(t;<m,n>(c;1,...,c;m,c))=1 holder. Ved hjelp av aksiomet A17 må man da ha at T:– U(c) og derfor at ∂([c])êC1UC2.

Vi sondrer nå mellom tre tilfeller:

Tilfelle (i): ∂([c])êC2. Da har vi C2≠ø og derfor at det finnes G der

Gê((G+);-1)({∂([c])}). Det følger da i lys av definisjonen av Z1 at
GêZ1(c;1,...,c;m) Inkl *f**;<m,n>(∂([c;1]),...,∂([c;m])) og dessuten at G*(G)=∂([c]). Fra dette kan man slutte at ∂([c])êG*"*f**;<m,n>(∂([c;1]),...,∂([c;m])) og derfor at R*(t;<m,n>(c;1,...,c;m,c))=1.

Tilfelle (ii): ∂([c])ê(C1–C;1*). Da må det i lys av definisjonen av C1 finnes en formel HêCFml(L) slik at
T :– c= μ(H). Siden vi nå forutsetter at T:– t;<m,n>(c;1,...,c;m,c) følger det derfor at T:– t;<m,n>(c;1,...,c;m,μ(H)) og derfor at T:– T;<m,n>(c;1,...,c;m,H). Man har da at <∂([c]), g;T(H)>êG;T & g;T(H)ê *f*;T(<m,n>)(∂([c;1]),....,∂([c;m])). Derfor har man siden
f;T(<m,n>)(∂([c;1]),....,∂([c;m])) Inkl *f**;<m,n>(∂([c;1]),....,∂([c;m])) og fordi G;T Inkl G* at ∂([c])êG*"*f**;<m,n>(∂([c;1]),....,∂([c;m])). Dette impliserer: R*(t;<m,n>(c;1,...,c;m,c))=1 som er det vi ønsker.

Tilfelle (iii): ∂([c])êC1*. Da må C1* selvfølgelig være ikke-tom. Det følger derfor at det finnes H slik at Hê((G0);-1)({∂([c])}). Videre har vi i lys av definisjonen av Z2 og det forhold at vi nå forutsetter T:– t;<m,n>(c;1,....,c;m,c) at
HêZ2;<m,n>(c;1,...,c;m). Men da ∂([c]) = G0(H) = G*(H) og Hê*f**;<m,n>(∂([c;1]),....,∂([c;m])). Dette impliserer:
∂([c])êG*"*f**;<m,n>(∂([c;1]),....,∂([c;m])) og derfor R*(t;<m,n>(c;1,...,c;m,c))=1.

Dette avslutter vårt bevis for at Lemma 12.1.2 holder i det tilfelle at F= t;<m,n>(c;1,....,c;m,c). Tilfellene der t er en konstant, en singulær term i snever forstand, en term av typen f(t;1,...,t;n) eller av typen μ(G) skulle ikke by på noen spesielle problemer. Disse tilfellene vil kunne behandles på omtrent samme måte som i tidligere bevis av denne typen, f.eks. beviset for Teorem 2.1 i Kapittel IV i Rognes [1].
Vi anser derfor Lemma 12.1.2 som etablert. Anta nå at T:– F og la x;1,...,x;n være de fri variablene som forekommer i L (n≥0). Da har man T:– (Ax;1)...(Ax;n)F og derfor ved hjelp av Lemma 12.1.2 at R*((Ax;1)...(Ax;n)F)=1. Men dette innebærer at R*:= F. Vi har følgelig at R:= T. Nå er det lett å verifisere at R*êMod;(I;0)(L) og derfor at R*|L'êMod;(I;0)(L'). Det følger at R*|L' := T'. Dette avslutter vårt bevis for Teorem 12.1.1. **Q.E.D.**

Siden Mod;(I,0)(L) Inkl Mod*;(I;0)(L) har man at den følgende sats holder i lys av Teorem 12.1.1:

Teorem 12.1.3 Er T' = ß(Δ', DegI;0,L') en konsistent DegI;0-teori i L' finnes det en modell R'êMod*;(I;0)(L) slik at R' := T'.

§12.2 DegI:0 er ikke sterkt komplett med hensyn på Mod+:(I:0)(L).

I denne paragrafen og de neste paragrafene skal vi etterhvert gi et bevis for at DegI;0 er svakt komplett med hensyn på Mod+;(I;0)(L) og Mod*+;(I;0)(L). Den teknikken som vil bli brukt er i hovedtrekkene den som ble brukt i tidligere avsnitt, f.eks. for å vise at I;0 var svakt komplett med hensyn på Norm+;(I;0)(L). Imidlertid må man nå foreta en del forandringer i noen av definisjonene vi tidligere har brukt. Dette innebærer at en detaljert bevisføring er nødvendig for fullt ut å få et tilstrekkelig overblikk over situasjonen.
La oss med en gang bemerke at DegI;0 ikke kan være sterkt komplett med hensyn på Mod+;(I;0)(L). Det samme gjelder modellklassen Mod*+;(I;0)(L).

For anta at L inneholder konstanten c, og at T er den DegI;0-teorien der de ikke-logiske aksiomene er U(c) og $c \neq \mu(F)$ for alle formler F i L. Det er lett å vise at denne teorien har en modell i klassen Mod;(I;0)(L). For velger man ut en modell RêMod;(I;0)(L) som oppfyller de følgende krav:

(i) (CFml(£(R)) – X;(R,L)) ≠ø
(ii) G(R)"X;(R,L) Ω G(R)"(CFml(£(R)) – X;(R,L)) =ø
(iii) ∏(R)(c) = x êG(R)"(CFml(£(R)) – X;(R,L))

– noe som klart er mulig –, ser man ved litt ettertanke at R:= T. Det er imidlertid klart at denne modellen R ikke kan være med i Mod+;(I;0)(L). For anta R'êMod+(I;0)(L) og at R':= T. Da har man at R'(c)êR(U) = g(R)"X;(R,L) og derfor at R'(c)= G(R)(g(r)(F)) for noen FêCFml(L(R')). Men dette er umulig om R' skal være en modell for T, for da må man kreve at R := $c \neq \mu(F)$ for alle FêCFml(L(R')).
Disse overveielsene viser at T er konsistent, men likevel uten noen modell i Mod+;(I;0)(L). Men det er dette som per definisjon er det som ligger i at DegI;0 ikke er sterkt komplett med hensyn på Mod+;(I;0)(L). Lignende bemerkninger kan gjøres når det gjelder forholdet mellom DegI;0 og Mod*+;(I;0)(L).

§12.3 B-normale første-ordens strukturer.

Før vi går nærmere inn på beviset for at DegI;0 er svakt komplett med hensyn på Mod+;(I;0)(L) er det nødvendig å studere en del nye definisjoner og hjelpesetninger. Først gis den følgende definisjon som fastsetter hva det vil si at R er en B-normal første-ordens struktur for L;-1, der L;-1 er første-ordens korrelatet til I;0-språket L:

Definisjon 12.3.1 La L være et I;0-språk og R en første-ordens struktur for L;-1. Da kalles *R for en B-normal første-ordens struktur for L;-1* hvis og bare hvis den oppfyller de følgende betingelser:

N1 Det finnes en funksjon G som er slik at Dom(G) = CFml(£;(L;-1,R)) og der Rgn(G) = R(U).
N2 <x;1,...,x;n,y>êR(t;<m,n>) –> yêR(U)
N3 <x,y;1,...,y;n>êR(P«μ(F)») hvis og bare hvis man har x = G(R)(«g;(L;-1,R)(F)»[f;(L;-1,R)(y;1),....,f(L;-1,R)(y;n)]) i det man forutsetter at matrisen «F» er av grad n≥0
N4 Anta «F» er av grad n≥0, at
<x;1,...,x;m,y;1,...,y;n>êR(P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F)»). og at p(y;1,...,y;n)=G(R)(«g;(L;-1,R)(F)»[f;(L;-1,R)(y;1),....,f(L;-1,R)(y;n)]).
Da må man ha: <p(y;1,...,y;n),x;1,..,x;m>êR(t;<m,n>)
N5 Er <y,x;1,...,x;m>êR(t;<m,n>) så finnes det en HêFml(L) og et nêN slik at
(i) Grad(«H») = n≥0
(ii) y = G(R)(«g;(L;-1,R)(H)»[f;(L;-1,R)(y;1),....,f(L;-1,R)(y;n)]).
(iii) <x;1,...,x;m,y;1,...,y;n>êR(P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F)»)

Som man ser er definisjonen av uttrykket "B-normal første-ordens struktur for L;-1" noe forskjellig fra definisjonen av uttrykket "normal første-ordens struktur for L;-1" som vi ga tidligere. Vi har erstattet kravet (iii) i denne tidligere definisjonen, Definisjon 4.3 i §4, med det noe svakere kravet N4. Dessuten har vi føyd til det nye kravet N5.

Definisjon 12.3.2 La R være en B-normal første-ordens struktur for L;-1. Da finnes det en funksjon G som oppfyller kravene N1 – N5 i Definisjon 12.3.1. Vi skal definere en struktur R;-2êMod;(I;0)(L). R;-2 er defiinert ved de følgende punkter:

(1) |R;-2| = |R|
(2) £(R;-2) = £;(L;-1,R)
(3) G(R;-2) = G
(4) f(R;-2) = f;(L;-1,R)
(5) g(R;-2) = g;(L;-1,R)
(6) R;-2(u) = R(u) om u er et n-ært predikat, funksjonssymbol, en singulær term i snever forstand eller en konstant i L.
(7) R;-2(U) = R(U)
(8) R;-2(t;<m,n>) = R(t;<m,n>)
(9) f;<m,n>)(R;-2)(x;1,....,x;m) er mengden av alle formler F som er slik at det finnes en GêFml(L) der «G» er av grad q≥0 for noe q, og der man har:
  (i) F = «g;(L;-1,R)(G)»[f;(L;-1,R)(y;1),....,f;(L;-1,R)(y;q)]
  (ii) <x;1,...,x;m,y;1,...,y;q>êR(P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,G)») for noen y;1,...,y;qê|R|.
(10) Nullobjektet i R;-2, ie *(R;-2) er identisk med nullobjektet i R, *(R).

Det bør bemerkes at om R er en B-normal første-ordens struktur for L;-1 er i og for seg ikke R;-2 entydig bestemt. Man må først velge uten av de funksjonene G som oppfyller kravene N1 – N5 og så konstruere R;-2 på basis av denne slik som vist i Definisjon 12.3.2.

Ved hjelp av denne definisjonen kan man bevise den følgende hjelpesetning:

Lemma 12.3.3 Er LêI, dvs. er L et I;0-språk, og er R en B-normal I;0-modell for L har man at R;-2êMod+;(I;0)(L).

Bevis: Vi behøver bare å påse at R;-2 er veldefinert. Dette innebærer at vi må vise at stipulasjonene (7) og (8) i definisjonen ovenfor ikke leder til noen motsigelser.

(a) Anta yêG(R;-2)"f;<m,n>(R;–2)(x;1,....,x;m). Da har man:
(1) y= G(R;-2)(H)
(2) Hêf;<m,n>(R;–2)(x;1,....,x;m) for en eller annen formel H.

Ved hjelp av Definisjon 12.3.2, klausul (9), følger da at det finnes en formel GêFml(L) der «G» er av grad q≥0 for noe q, og der man har:

(3) H = «g;(L;-1,R)(G)»[f;(L;-1,R)(y;1),....,f;(L;-1,R)(y;q)
(4) <x;1,...,x;m,y;1,...,y;q>êR(P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,G)») for noen y;1,...,y;qê|R|.

Dette, N4 i definisjon 12.3.1, (3) og (1) impliserer at <y,x;1,...,x;m>êR(t;<m,n>)

(b) At det omvendte gjelder ser man umiddelbart fra N5 i Definisjon 12.3.1 og definisjonen av f;<m,n>(R;-2).

Det som er nevnt under (a) og (b) viser at R;-2(t;<m,n>) er veldefinert. At R(U) er veldefinert er klart siden G(R;-2) = G og G i lys av Definisjon 12.3.1 skal oppfylle betingelsene N1 og N2. **Q.E.D.**

Lemma 12.3.4 La L være et I;0-språk og R en B-normal første-ordens struktur for L;-1. Anta FêCfml(L(R)) og têCTerm(L(R)). Anta t ≠μ(H) for alle HêCFml(L(R)). La tilslutt w være en variabel som ikke forekommer i F eller t. Da gjelder:

(i) R;-2(F) = R(X;w(F))
(ii) R;-2(t) = R(X;w(t))

Beviset for denne hjelpesetningen er i hovedtrekkene nøyaktig som beviset for Lemma 4.3 i §4. Induksjonstrinnene (i) – (v) i dette beviset kan overtas nærmest ordrett. Det eneste tilfellet som må bevises på nytt er tilfelle (vi).

Nå har man, i det man antar at F = T;<m,n>(t;1,...,t;n,H), at det finnes kêN slik at Grad(«H») = k og dessuten navn og konstanter d;1,...,d;k slik at
H = «H»[d;1,...,d;k]. Nå følger:

(1) R;-2(T;<m,n>(x;1,...,x;m,H) = 1 <–>
G(R;-2)(H) ê*f*;<m,n>(R;-2)(R;-2(t;1),....,R;-2(t;m)) <–>
«g(R;-2)(H)»[g(R;-2)(d;1),....,g(R;-2)(d;k)]ê
f;<m,n>(R;-2)(R;-2(t;1),....,R;-2(t;n)) <->

(b) «g;(L;-1,R)(H)»[f;(L;-1,R)(R(d;1)),....,f;(L;-1,R)(R(d;k))]ê
f;<m,n>(R;-2)(R;-2(t;1),....,R;-2(t;m))

På den annen side har man:

(2) R(X;w(T;<m,n>(t;1,...,t;m,H)) = 1 <–>
R[(Ew;1)....(Ew;m)(P«T;<m,n>(x;1,....,x;m,H»[w;1,...,w;m,d;1,....,d;k] &
Konj/i,1,m/(Q;i(w;i))] =1

Dette er så i sin tur tilfelle hvis og bare hvis

(Ew;1)....(Ew;m)(Konj/i,1,m/(w;iê|R]) &
R(P«T;<m,n>(x;1,....,x;mH»[w;1,...,w;m,d;1,....,d;k])=1 &
Konj/i,1,m/(R(Q;i(n(w;i))) =1))

Dette holder hvis og bare hvis

(c) (Ew;1)....(Ew;m)(Konj(i,1,m/(w;iê|R]) &
<w;1,.....,w;m,R(d;1),...,R(d;k)>êR(P«T;<m,n>(x;1,....,x;mF») &
Konj/i,1,m/(R(Q;i(n(w;i))) =1))

Nå har man at (b) per definisjon er ekvivalent med:

(d) <R;-2(t;1),.....,R;-2(t;m),R(d;1),...,R(d;k)>êR(P«T;<m,n>(x;1,....,x;mF»)

Ved hjelp av induksjonshypotesen har man:

R(Q;i(n(w;i))) =1 <–> w;1 = R;-2(t;i) (i=1,...,m). Dette impliserer så det man ønsker, nemlig at (c) og (d) er ekvivalente. **Q.E.D.**

Vi kan nå gi bevis for vårt viktigste resultat:

Teorem 12.3.5 Anta L er et I;0-språk, at F;0êFml(L) og dessuten at Grad(«F;0») ≥1. La h = <P«μ(F;0», P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F;0)»> for noe <m,n>êNXN der m≥1. Anta Δ Inkl Fml(L) og at

UN(Mg(C;F: FêΔ)) Inkl (Spes(L;-1) – {(h);0,(h);1})

La T = ß(Δ,DegI;0,L) være en konsistent DegI;0-teori i L. Da gjelder:

(ER)(RêMod+;(I;0)(L) & R:= T).

Bevis: Beviset har i mange henseende den samme struktur som de bevisene vi tidligere har gitt for lignende satser. Siden T er konsistent finnes det ifølge Teorem 12. 1.1 en tellbar modell RêMod;(I;0)(L) slik at R:= T. Spesielt har man:

(1) R:= Δ. Vi skal først definere en B-normal første-ordens struktur R* for L;-1.

Dette skjer ved at vi setter:

(2) R*(u) = R;-1(u) om u er en konstant, en singulær term i snever fostand, et n-ært predikat eller et n-ært funksjonsymbol i L (n≥1).

(3) R*(U) = R;-1(U)

(4) R*(t;<m,n>) = R;-1(t;<m,n>) for alle <m,n>êNXN

Vi setter dessuten *(R*) = *(R;-1) og |R*| = |R;-1|. Dessuten bruker vi de samme navnene i R, R;-1 og R* og setter selvfølgelig at R*(i) = R;-1(i) = R(i) om i er et navn.

(5) R*(Q) = R;-1(Q) om QêUN(Mg(C;F: FêΔ))

Det gjenstår bare å definere R*(Q) når Q er et spesielt predikat der

Qê(Spes(L;-1) – {(h);0,(h);1}).

Det bør bemerkes at vi kan anta, som i våre tidligere bevis, at CFml(£;(L;-1,R*)) = X;(R,L), f;(L;-1,R*) = f(R) og g;(L;-1,R*) = g(R). I det følgende vil vi også bruke "K" som forkortelse for "UN(Mg(C;F: FêΔ)) Ω Spes;1(L;-1)".

Vi skal definere en funksjon W med X;(R,L) som domene og R*(U) som verdiområde. Anta Qê(Spes(L;-1) – {(h);0,(h);1}). Da finnes det en formel GêFml(L) og nêN slik at Q = P«μ(G)» og Grad(«G») = n. Vi definerer i så fall en relasjon W(Q) ved å sette:

(6) <x,«g(R)(G)»[f(R)(y;1),....,f(R)(y;n)]>êW(Q) <–> <x,y;1,...,y;n>êR;-1(P«μ(G)»)

Dernest defineres W;Δ ved:

(7) W;Δ = UN/QêK/(W(Q))

Det er forholdsvis lett å se at de følgende påstander gjelder om W;Δ:

(8) W;Δ er en funksjon

(9) Rgn(W;Δ) Inkl R;-1(U) = R(U)

(10) Dom(W;Δ) Inkl X;(R,L) Inkl Cfml(£(R))

(11) Cd(X;(R,L) – Dom(W;Δ)) = Aleph;0

La å F;1 være en tautologi i L. Vi kan anta at F;1 = (F;2v¬F;2) der F;2êFml(L), Grad(«F;2») = k og T;<m,n>(x;1,...,x;m,F;0) er en subformel av F;2. Da må Grad(«F;1») = 2*k. Videre må man ha om man setter:

∂(y;1,...,y;k) = «g(R)(F;1)»[f(R)(y;1),....,f(R)(y;k), f(R)(y;1),....,f(R)(y;k)]

at ∂(y;1,...,y;k) er en tautologi i X;(R,L) for alle y;1,...,y;kê|R|.

Videre må man ha at ¬(∂(y;1,...,y;k)êDom(W;Δ)) for alle y;1,...,y;kê|R|. Når man kontrollerer dette bør man huske på at P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F;0) ikke er noe element i UN(Mg(C;F: FêΔ)). Det eksisterer derfor en funksjon G1 som er slik at:

(12) Dom(G1) = Mg(∂(y;1,...,y;k): y;1,...,y;kê|R|)

(13) Rgn(G1) = R(U)

Det er lett å vise at X;(R,L) – (Dom(G1)U Dom(W;Δ)) er en tellbart uendelig mengde. Det finnes derfor en funksjon G2 slik at:

(14) Rgn(G2) = R(U)

(15) Dom(G2) = X;(R,L) – (Dom(G1)U Dom(W;Δ))

Man kan nå definere W ved å sette:

(16) W =(W;Δ U G1 U G2)

Dette må åpenbart være en funksjn der Dom(W) = X;(R,L) = CFml(£;(L;-1,R*) og der Rgn(W) = R(U).

Vi skal nå avslutte definisjonen av R*. Det gjenstår bare å definere R*(Q) for de Q som er med i Spes(L;-1) – UN(Mg(C;F: FêΔ)).

(i) Anta Q = P«T;<m,n>(x;1,...,;m,G)» der <m,n>êNXN–h der «G» er av grad q≥0. Da setter vi:

(17) R*(P«T;<m,n>(x;1,...,;m,G)») = Mg(<x;1,...,x;m,y;1,...,y;q>: <W(«g(R)(G)»[f(R)(y;1),...,f(R)(y;q)], x;1,...,x;m>êR(t;<m,n>))

(ii) Anta Q = P«T;<m,n>(x;1,...,;m,G)» der <m,n>êh der «G» er av grad q≥0. I så fall lar vi(18) R*(P«T;<m,n>(x;1,...,;m,G)») være mengden av alle de <x;1,....,x;m,y;1,...,y;q>ê|R|^(m+q) som er slik at:

(a) «g(R)(G)»[f(R)(y;1),...,f(R)(y;q)] êDom(W;Δ UG1) og der

(b) <(W;ΔUG1)(«g(R)(G)»[f(R)(y;1),...,f(R)(y;q)], x;1,...,x;m>êR(t;<m,n>))

(iii) Q = P«μ(G)» der «G» er av grad q≥0 . I så tilfelle setter man:

(19) R*(P«μ(G)») = Mg(<x,y;1,...,y;q>:
x = W(«g(R)(G)»[f(R)(y;1),...,f(R)(y;q)])

Dermed skulle vi ha gitt en fullstendig definisjon av strukturen R*

Det er nå nødvendig å verifisere at R* er en B-normal første-ordens struktur for L;-1. Det er tilstrekkelig å vise at funksjonen W, slik den har blitt definert ovenfor, tilfredstiller kravene N1 – N5 i Definisjon 12.3.1.

Det er nokså åpenbart at R* oppfyller kravene N1 og N2.

Ad kravet N3: (a) Anta (20) P«μ(G)»êUN(Mg(C;F: FêΔ)) og

(21) <x,y;1,...,y;q>êR*(P«μ(G)»). Da har man:

<x, «g(R)(G)»[f(R)(y;1),....,f(R)(y;q)]> êW;(P«μ(G)») Inkl W og derfor, siden W er en funksjon:

(22) W(«g(R)(G)»[f(R)(y;1),....,f(R)(y;q)]) = x

(b) Anta på den annen side at (20) og (22) holder. Siden «G(R)(G)»[f(R)(y;1),....,f(R)(y;q)]êX;(R,L) har man at det finnes x' slik at

(23) x' = G(R)(«g(R)(G)»[f(R)(y;1),....,f(R)(y;q)]) og derfor i kraft av definisjonen av R;-1 at

(24) <x',y;1,...,y;q>êR;-1(P«μ(G)»). Det følger i lys av definisjonen av W(Q) at man må ha:

(25) x' = W;(P«μ(G)»)(«g(R)(G)»[f(R)(y;1),....,f(R)(y;q)]) som sammen med (22) og det forhold at W;(P«μ(G)») Inkl W gir en x'=x. Dette og (24) gir en <x,y;1,...,y;q>êR;-1(P«μ(G)») = R*(P«μ(G)») som er det som ønskes i dette tilfelle.

Er ¬(P«μ(G)»êUN(Mg(C;F : FêΔ))) følger det at kravet N3 er oppfylt fra (19) og det faktum at W er en funksjon.

Ad kravet N4: Anta P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,G)»êUN(Mg(C;F : FêΔ)) og at <x;1,....,x;m,y;1,...,y;q> êR;-1(P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,G)») i det vi antar at «G» er av grad q≥0. Da har man i kraft av definisjonen av R;-1 at:

«g(R)(G)»[f(R)(y;1),....,f(R)(y;q)] ê*f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;m)

Det må da finnes z slik at

(25) z= G(R)(«g(R)(G)»[f(R)(y;1),....,f(R)(y;q)]). Man må følgelig ha: zêG(R)"(*f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;m)) og derfor at:

<z,x;1,...,x;m>êR(t;<m,n>) = R*(t;<m,n>)

Fra (25) følger i lys av definisjonen av R;-1:

(26) <z,y;1,...,y;q>êR;-1(P«μ(G)»). Nå må P«μ(G)»êUN(Mg(C;F: FêΔ)) og man har derfor fra (26):

W(P«μ(G)»)(«g(R)(G)»[f(R)(y;1),....,f(R)(y;q)]) = z

Siden W(P«μ(G)») Inkl W impliserer dette:

W(«g(R)(G)»[f(R)(y;1),....,f(R)(y;q)])) = z. Det følger derfor, siden <z,x;1,...,x;m>êR(t;<m,n>) = R*(t;<m,n>):

<W(«g(R)(G)»[f(R)(y;1),....,f(R)(y;q)])),x;1,...,x;m>êR*(t;<m,n>)

som er det vi ønsker.

Har man at ¬(P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,G)»êUN(Mg(C;F : FêΔ))) følger det at kravet N4 er oppfylt fra definisjonen av R*, dvs. fra (17) og (18).

Ad kravet N5: Anta <y,x;1,...,x;m>êR*(t;<m,n>). Da har man at yêR(U) og derfor at yêRgn(G1). Det følger at

(+) y=G1(«g(R)(F;1)»[f(R)(y;1)....f(R)(y;k),f(R)(y;1),...,f(R)(y;k)] for noen y;1,..,y;kê|R|. Man må ha at P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F;1)» ikke er med i UN(Mg(C;F: FêΔ). Derfor har man i lys av (+), (18) og det faktum at <y,x;1,...,x;m>êR*(t;<m,n>):

<x;1,...,x;m,y;1,...,y;k,y;1,...,y;k>êR*(P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F;1)») som sammen med (+) og det faktum at G1 Inkl W gir oss det vi ønsker.

Ved et enkelt induksjonsbevis på lengden av de velformede uttrykk i L;-1 kan man nå vise:

(27) Anta FêCFml(L;-1(R)) & têCTerm(L;-1(R)) og at Spes[F] og Spes[t] er inkludert i UN(Mg(C;F: FêΔ)). Da gjelder

(i) R;-1(F) = R*(F)

(ii) R;-1(t) = R*(t)

Vi betrakter nå R*;-2. For å være garantert at R*;-2êMod+;(I;0)(L) må man godtgjøre den følgende påstand:

(28) *f*;<m,n>(R*;-2)(x;1,...,x:m) Inkl Tr;L(R*;-2) om <m,n>êh og x;1,...,x;mê|R*|.

Bevis for (28): Anta Fê*f*;<m,n>(R*;-2)(x;1,...,x:m) (<m,n>êh). Da har man per definisjon at det finnes en GêFml(L) der «G» er av grad q≥0 for noe q, og der man har:

(29) F = «g;(R)(G)»[f;(R)(y;1),....,f;(R)(y;q)]

(30) <x;1,...,x;m,y;1,...,y;q>êR(P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,G)») for noen y;1,...,y;qê| R*;-2|.

Vi undersøker tre forskjellige muligheter:

Tilfelle (i): FêDom(W;Δ). Da er FêDom(W(Q)) for noe Q= P«μ(G)» der P«μ(G)»êUN(Mg(C;F: FêΔ)). Det følger at <x,F>êW(Q) for noe xê|R| og at man i lys av definisjonen av W(Q) har F = «g(R)(G')»[f(R)(w;1),...,f(R)(w;p)] for en eller annen formel G' der «G'» er av grad p. Fra dette og (29) kan man ved hjelp av Lemma 2.0 i §2 slutte at «G» = «G'» og w;i = y;i for i=1,... q. Siden P«μ(G)»êUN(Mg(C;F: FêΔ)) følger det i lys av definisjonen av C;F at
P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,G)»ê UN(Mg(C;F: FêΔ)) og derfor etter definisjonen av R* at R*(P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,G)») = R;-1(P.«T;<m,n>(x;1,...,x;m,G)»). Dette, (30) og definisjonen av R;-1 gir en:

(31) «g;(R)(G)»[f;(R)(y;1),....,f;(R)(y;q)]ê*f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;n) Inkl Tr;L(R) siden <m,n>êh. La nå i;1,...,i;q være navnene på henholdsvis y;1,...,y;q. Fra (31) og definisjonen av Tr;L(R) følger da:

(32) R(«G»[i;1,...,i;q]) =1 og derfor i lys av Lemma 4.2:

(33) R;-1(X;w(«G»[i;1,...,i;q])) =1. Vi hadde P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,G)»êC;H for noen HêΔ. Det følger da i lys av definisjonen av C;H at Spes[X;w(G)] = Spes[X;w(«G»[i;1,...,i;q])] Inkl C;H Inkl UN(Mg(C;F: FêΔ)). Dette faktum , (27) og (33) impliserer:

(34) R*(X;w(«G»[i;1,...,i;q])) =1

I sin tur impliserer dette ved hjelp av Lemma 12.3.4 at R*(«G»[i;1,...,i;q]))=1
Men g(R)(«G»[i;1,...,i;q])) = «g(R)(G)»[f(R)(y;1),....,f(R)(y;q)]. Derfor har man:

F=«g(R)(G)»[f(R)(y;1),....,f(R)(y;q)]êTr;L(R*;-2) som er det vi ønsker.

Tilfelle (ii): FêDom(G1). Da finnes det y;1,...,y;k slik at F=∂(y;1,...,y;k). Men side ∂(y;1,...,y;k) er en tautologi i X;(R,L) har man at

F = ∂(y;1,...,y;k) êTr;L(R*;-2) som er det vi ønsker.

Tilfelle (iii): FêDom(G2). Anta for reduktio ad absurdum at
P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,G»êU(Mg(C;F: FêΔ)). Da har man også at
P«μ(G)»êUN(Mg(C;F: FêΔ)). Nå har vi at det finnes xê|R| slik at
G(R)(«g(R)(G)»[f(R)(y;1),....,f(R)(y;q)]) = x og derfor at
<x,y;1,...,y;q>êR;-1(P«μ(G)»). Da har man per definisjon at følgende holder:
<x,«g(R)(G)»[f(R)(y;1),....,f(R)(y;q)]> êW(P«μ(G)») Inkl W;Δ og derfor:
F = «g(R)(G)»[f(R)(y;1),....,f(R)(y;q)] êDom(W;Δ). Men dette er umulig. Det følger at det ikke er slik at P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,G»êU(Mg(C;F: FêΔ)). Men da må man ha i lys av (18) og (29), siden <m,n>êh at:
F = «g(R)(G)»[f(R)(y;1),....,f(R)(y;q)] êDom(W;Δ UG1).
Men også dette er umulig siden FêDom(G2). Det følger at dette tilfellet er utelukket siden det leder til motsigelser i alle tilfelle. Dette avslutter vårt bevis for (28).

Vi har nå vist at R*;-2êMod+;(I;0)(L). Det gjenstår bare å vise at R*;-2 := Δ. Man kan da konkludere med at R*;-2 := T.
Anta FêΔ. I Lys av (1) har man da
(33) R := F.
Anta x;1,...,x;n er de variablene som forekommer fri i F og la F;(x;1,...,x;n)[i;1,...,i;n] være en vilkårlig R*;-2-instans av F. Fra (33) følger da siden |R|= |R*:-2| og vi bruker de samme navnene i R og R*;-2:
(34) R(F;(x;1,...,x;n)[i;1,..,i;n]) = 1
Dette og Lemma 4.2 impliserer:
(35) R;-1(X;w(F;(x;1,...,x;n)[i;1,...,i;n])) =1.
Siden FêΔ har vi at Spes[X;w(F)] = Spes[X;w(F;(x;1,...,x;n)[i;1,...,i;n])] Inkl C;F. Man har derfor i lys av (27) og (35) at R*(X;w(F;(x;1,...,x;n)[i;1,...,i;n])) =1. Men dette og Lemma 12.3.4 impliserer R*;-2(F;(x;1,...,x;n)[i;1,...,i;n]) =1. Nå var F;(x;1,...,x;n)[i;1,...,i;n] en vilkårlig R*;-2-instans av F. Derfor R*;-2 := F. Men F var en vilkårlig formel i Δ. Det følger derfor at R*;-2:= Δ. **Q.E.D.**

Fra Teorem 12.3.5 følger:

Teorem 12.3.6 Anta LêI, med andre ord at L er et I;0-språk. Da gjelder:
Th(DegI;0,L) = Val;L(Mod+;(I;0)(L)).

Bevis: Inklusjonen mot høyre kan allerede oppfattes som bevist i lys av Teorem 12.1.1. La FêFml(L) og anta at x;1,...,x;n er de variabeltegnene som forekommer fri i F. La G= (Ax;1)....(Ax;n)F. Anta FêVal;L(Mod+;(I;0)(L)). Da har man:
(AR)(RêMod+;(I;0)(L) –> R:= F). Dette impliserer:
(1) (AR)(RêMod+;(I;0)(L) –> R(G)=1)
Anta nå for reduktio ad absurdum at T = ß({¬G}, DegI;0,L) er konsistent. Vi kan da lett finne en formel H;0êFml(L) som er slik at dersom man setter
h= <P«μ(H;0)», P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,H;0)»> så har man at:
C;(¬G) Inkl (Spes(L;-1) – {(h);0,(h);1}). I lys av Teorem 12.3.4 følger fra dette at:
(ER)(RêMod+;(I;0)(L) & R(G)=0). Men dette strider mot (1). Det følger at T er inkonsistent og at man derfor må ha DegI;0 :– G. I såfall følger DegI;0:– F. Dette innebærer åpenbart at FêTh(DegI;0,L). **Q.E.D.**

Teorem 12.3.6 uttrykker at DegI;0 er svakt komplett med hensyn på Mod+;(I;0)(L). Siden Mod*+;(I;0)(L) inkl Mod+;(I;0)(L) har vi:

Teorem 12.3.7 Anta L er et I;0-språk, at F;0êFml(L) og dessuten at Grad(«F;0») ≥1. La h = <P«μ(F;0», P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,F;0)»> for noe <m,n>êNXN der m≥1. Anta Δ Inkl Fml(L) og at

UN(Mg(C;F: FêΔ)) Inkl (Spes(L;-1) – {(h);0,(h);1})

La T = ß(Δ,DegI;0,L) være en konsistent DegI;0-teori i L. Da gjelder:

(ER)(RêMod*+;(I;0)(L) & R:= T).

og dessuten:

Teorem 12.3.8 Anta LêI, med andre ord at L er et I;0-språk. Da gjelder:

Th(DegI;0,L) = Val;L(Mod*+;(I;0)(L)).

Resultatene vi kom til i §12.2 kan sammenfattes i det følgende teorem:

Teorem 12.3.9 Anta L er et I;0-språk og at cêConst(L). Sett:

Δ = {U(c)} U Mg(c≠μ(F): FêFml(L))

Da har man om T= ß(Δ,DegI;0,L):

(i) T er en konsistent DegI;0-teori i L

(ii) T har ingen modell i klassen Mod+;(I;0)(L) eller klassen Mod*+;(I;0)(L).

(iii) Er Δ' en endelig delmengde av Δ' så har T'=ß(Δ',DegI;0,L) en modell i Mod+;(I;0)(L) (Mod*+;(I;0)(L))

Vi utelater beviset for dette teoremet siden vi tidligere har gitt bevis for lignende teoremer. Argumenter av den typen vi da brukte kan også brukes her. Forøvrig foreligger beviset allerede delvis skissert i §12.2.

Dette avslutter våre undersøkelser i tilknytning til den famileien av I;0-systemer som vi innledningsvis definerte. I den neste delen av dette arbeidet skal vi studere systemer som det er naturlig å betrakte når man utvider I;0-systemene med visse sannhetspredikater.

Del II

Sannhet

§1 I:0-språk med sannhetspredikat.

I systemet I;0 har vi akseptert eksistensen av intensjoner. Imidlertid har vi tilsynelatende ingen muligheter for å uttrykke at intensjoner er sanne eller usanne i slike språk. Man kan likevel øke uttrykkskraften ved å anta at de I;0-språkene man ønsker å ta i betraktning inneholder predikatet "x er sann" i det man da underforstår at det er hensikten at dette predikatet skal være sant om nøyaktig de intensjonene som er sanne og usant om nøyaktig de intensjonene som er usanne. La oss kalle et I;0-språk som inneholder dette predikatet eller predikater med lignende logiske egenskaper for I;0-språk med sannhetspredikat, eventuelt I;0-språk med sannhetspredikater.

§1.1 Definisjoner av en del begreper som trengs i forbindelse med sannhet.

I det følgende betegner "I" mengden av alle I;0-språk. Vi lar "S" være et vilkårlig utvalgt ikke-logisk monadisk ikke-logisk predikat som er med i Pred;1(L) for et språk LêI. I resten av dette arbeidet skal S oppfattes som en helt bestemt, fiksert størrelse. Siden den konkrete naturen til predikatet S ikke spiller noen rolle gis det ikke noen eksakt definisjon. Vi lar "I;S" betegne mengden av alle de LêI der vi har at SêPred;1(L). (Pred;1(L) er klassen av de monadiske predikatene i L) Det skulle være klart at S ikke er noen intensjonal predikatkonstant på samme måte som de diverse t;<m,n> eller U, eller noe logisk symbol i noe LêI;S. Videre skulle det ikke være noe vanskelig å se at om LêI;S og L' er en utvidelse av med noen nye ikke-logiske symboler så er også L'êI;S.

La X være en mengde språk der X Inkl I. Med en logikk over X forstår vi akkurat i dette arbeidet en funksjon R der man har Dom(R)=X og der man dessuten har at dersom LêDom(R) så er R(L) Inkl Fml(L). Med en I;0-logikk over X forstår vi en logikk R over X som er slik at R(L), for alle LêX, inneholder Ax(I;0,L) og elukket under modus ponens og universell generalisering. Vi sier at R er en logikk (I;0-logikk) hvis og bare hvis det finnes en X slik at R er en logikk (I;0-logikk) over X. Vi har valgt å skyte inn disse definisjonene her siden det ikke tidligere har blitt gitt noen presis definisjon av hva som menes med en logikk. Av denne grunn kan det være av en viss interesse for leseren å få vite mer nøyaktig hva det er som ligger i dette uttrykket når det brukes i dette arbeidet.

§1.2 Logikken I:0Sn.

La LêI;S. Vi definerer en mengde med modeller SnSem;(I;0)(L) ved å kreve at RêSnSem;(I;0)(L) hvis og bare hvis man har at

(i) RêSem;(I;0)(L)
(ii) £(R)êI;S
(iii) g(R)(S) = S

og vi dessuten har at R tilfredstiller de følgende tre krav:

C1 R(S)ΩG(R)"X;(R,L) = G(R)"Tr;L(R)
C2 R(S) Inkl G(R)"CFml(£(R))
C3 G(R)"(*f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;m)) Inkl R(S) forutsatt at <m,n>êh og x;1,...,x;mê|R|

Vi definerer, semantisk, en logikk L;0 ved å sette:

L;0 = Mg(<L, Val;L(SnSem;(I;0)(L))>: LêI;S)

Det skulle være klart at L;0 er en logikk over I;S slik vi ovenfor har definert uttrykket "logikk". Vi er interessert i å gi en adekvat syntaktisk karakteristikk av L;0. For dette formål skal vi definere en logikk I;0Sn. Aksiomene i denne logikken kan avgrenses slik:

Anta LêI;S. Da er Sn(L), sannhetsaksiomene i L, definert ved at en formel G er med i Sn(L) hvis og bare hvis GêFml(L) og G er en instans av et eller annet av de følgende skjemaer:

A1' S(μ(F)) <–> F
A2' (Ax)(S(x) –> U(x))
A3' t;<m,n>(x;1,....,x;m,y) –> S(y) forutsatt at <m,n>êh

I;0Sn-aksiomene i L, i symboler "Ax(I;0Sn,L)" er definert slik:

Ax(I;0Sn,L) = Sn(L) U Ax(I;0,L)

Med I;0Sn-teoremene i L, Th(I;0Sn,L), forstår vi den minste mengden formelmengden Z i L som inneholder Ax(I;0Sn,L) og som dessuten er lukket under modus ponens og universell generalisering.

Logikken I;0Sn kan nå, om man ønsker det, defineres slik:

I;0Sn = Mg(<L,Th(I;0Sn,L)>: LêI;S)

Som man ser har vi for alle LêI;S at I;0Sn(L) = Th(I;0Sn,L). Videre ser man at dersom modellmengden SnSem;(I;0)(L) er tom, dvs. om SnSem;(I;0)(L)=ø, så er Val;L(SnSem;(I;0)(L)) = Fml(L). I så fall har man L;0(L) = Fml(L).

Når det gjelder I;0Sn slik denne er definert ovenfor man si at det dreier seg om en logikk som er definert i rent syntaktiske termer.

Man kan nå bevise det følgende teorem:

Teorem 1.2.1 (i) Anta T =ß(Δ,I;0Sn,L) er en I;0Sn-teori i L. Anta RêSnSem;(I;0)(L) og at R:= Δ. Da har man at R:= T

(ii) Anta T' =ß(Δ' ,I;0Sn,L) er en konsistent I;0Sn-teori i L. Da finnes en R'êSnSem;(I;0)(L) slik at R':= T'.

Dette teoremet bevises i hovedtrekkene på samme måte som vi i Rognes [1] beviste komplettheten til I;0 med hensyn på Sem;(I;0)(L). Man må nå bare vise at den kanoniske modellen oppfyller kravene ovenfor. Siden dette i det vesentlige er en rent rutinemessig sak går vi ikke inn på detaljene akkurat her.

Fra Teorem 1.2.1 følger:

Teorem 1.2.2 Anta LêI;S. Da har man at Th(I;0Sn,L) er konsistent (dvs. at det ikke finnes noen FêFml(L) slik at (F&¬F)êh(I;0Sn,L)) hvis og bare hvis SnSem;(I;0)(L)≠ø.

Dette teoremet sier at en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for at I;0Sn skal være konsistent er at det finnes en modell i klassen SnSem;(I;0)(L). Det er imidlertid ukjent om systemet I;0Sn er konsistent og om det derfor finnes noen modeller i mengden SnSem;(I;0)(L). I denne forbindelse kan det nevnes at en av hovedvanskelighetene med å spesifisere en RêSemI;0(L) som også er med i SnSem;(I;0)(L) er å vise at den tilfredstiller kravet C1. Så

langt har vi ikke lykkes i angi noen slik modell. På den annen side har vi heller ikke greid å utlede noen kontradiksjoner i dette systemet. Selvom vi, delvis i lys av det siste, er tibøyelig til å tro at I;0Sn er konsistent virker likevel dette systemet mindre tilfredstillende.

§1.3 Noen paradokspregede setninger.

Ved å studere visse "paradokspregede" setninger kan man muligens finne flere grunner til å være misfornøyd med I;0Sn.

La oss betrakte konjunksjonen av de følgende tre formuleringer. Denne konjunksjonen kaller vi K:

(1) "a sier at alle grekere lyver"
(2) "a er en greker"
(3) "Enhver greker som sier noe som er forskjellig fra det at alle grekere lyver sier noe som er usant."

Fra K kan man utlede, noe som ikke er vanskelig å innse, at en bestemt intensjon, nemlig intensjonen at alle grekere lyver, er sann hvis og bare hvis den er usann. Det følger derfor at konjunksjonen av (1) – (3) er inkonsistent. Men dette er en konklusjon som det kan være vanskelig å akseptere siden (1) – (3) virker uavhengige av hverandre. At konjunksjonen av (1)– (3) er inkonsistent innebærer også at (1) og (2) logisk sett impliserer negasjonen av (3). Men negasjonen av (3) uttrykker at det finnes en greker som sier noe sant og der dette vedkommende sier er forskjellig fra det at alle grekere lyver. Men det er ikke opplagt at dette er en logisk konsekvens av (1) og (2).

Anta L êI;S og at L inneholder en konstant a og den intensjonale predikatkonstanten "x sier y" (som svarer til operatoren "x sier at F"). Anta videre at L inneholder predikatet "er en greker" som vi forkorter med G. La oss til slutt forutsette at "c" brukes som forkortelse for utsagsabstraktet
"μ((Ax)(Ay)(G(x) & P(x,y). –> ¬S(x))". Da kan de tre setningene (1) – (3) rimligvis parafraseres i språket L ved hjelp av de følgende formler:

(1') P(a, μ((Ax)(Ay)(G(x) & P(x,y). –> ¬S(x)))
(2') G(a)
(3') (Ax)(Ay)((G(x) & P(x,y) & y≠c) –> ¬S(y))

Det vi nevnte ovenfor kan da formuleres ved å si at konjunksjonen av (1') – (3') er inkonsistent. Betegnes konjunksjonen av (1') – (3') med K' kan dette formuleres formelt sett som et teorem slik:

Teorem 1.3.1 (I;0Sn,L) :– ¬K'

Siden det altså ikke prima facie er noen grunn til å anse ¬K' som logisk sann er det ikke urimelig å se på Teorem 1.3.1 som motintuitivt. Det man snarere kanskje kunne ønske var et konsistent system der ingen kontradiksjoner kunne utledes fra K'. Siden aksiomskjemaet A1' spiller en vesentlig rolle i beviset for Teorem 1.3.1 er det nærliggende å tro at man bør oppgi dette aksiomskjemaet eller i det minste legge visse restriksjoner på det. Det bør imidlertid understrekes at Teorem 1.3.1 i seg selv ikke viser at I;0Sn er inkonsistent.

Også de følgende to setninger kunne man umiddelbart tro at var konistente:

(4') (Ey)((Ax)(P(y,x) <–> x = μ((Aw)(P(y,w) –> ¬S(w)))))

(5') $(Ex)(x = \mu(\neg S(x)))$

Likevel har man:

Teorem 1.3.2 (I;0Sn,L) :– ¬(4') & ¬(5')

Igjen bemerker vi at dette resultatet ikke viser at I;0Sn er inkonsistent. Men resultatet kan, i likhet med Teorem 1.3.1 tolkes slik at det gir en grunn til å tro at systemet I;0Sn ikke er helt tilfredstillende. Siden aksiomskjemaet A1' også spiller en vesentlig rolle i beviset for Teorem 1.3.2 er dette ytterligere en grunn til å ta dette skjemaet opp til fornyet drøftelse.

I lys av betraktningene ovenfor kan kalkylen I;0Sn anses for å være noe utilfredstillende selvom det skulle vise seg at den var konsistent. I de neste paragrafene skal vi imidlertid beskrive en annen utvidelse av I;0 som muligens inneholder en bedre sannhetsteori.

§2 Et hierarki av språk. Hierakiet <π:n(L)>êN.

Vi lar fremdeles "I" betegne klassen av I;0-språk. Er LêI er Log(L) mengden av de logiske symbolene i L. Det må finnes et språk LêI slik at Pred;1(L) – Log(L)) er tellbart uendelig. Vi tenker oss at vi har valgt ut et slikt språk L, la oss kalle det L°. L° skal være fiksert i resten av dette arbeidet. Vi lar g være en enumme-rering av Pred;1(L°)– Log(L°). Også denne enummereringen må man tenke seg fiksert i det følgede. Vi definerer C ved å sette C = Pred;1(L°)– Log(L°). Videre definerer vi :

(i) S;0 = g(0) & U;0 = g(0)
(ii) S;n = g(2n) & U;n = g(2n+1) for alle n≥1.

Som man ser har man da at U;0, S;0, U;1, S;1, U;2, S;2 … er en sekvens av monadiske predikater i L°. Vi lar I;c være klassen av alle de LêI der man har at C er inkludert i Pred;1(L). Med andre ord skal alle predikatene i C være blandt de monadiske predikatene i L. I det følgende skal vi hovedakelig betrakte språk hentet fra denne mengden.

Vi skal nå for hvert nêN definere en avbildning π;n fra I;c over i I.

Anta LêI;c. Da er π;n(L) det I;0-språket L' i I som er slik at:

(i) Pred;m(L')= Pred;m(L) for alle m>1
(ii) Pred;1(L') = Pred;1(L) – (Mg(U;q: q≥n) U {S;q: q≥n})
(iii) Const(L') = Const(L)
(iv) Funk;m(L') = Funk;m(L) for alle m≥1
(v) SingTerm(L') = SingTerm(L).

Er altså LêI;c inneholder L ingen av predikatene U;n, S;n, U;(n+1), S;(n+1),.... osv. ad inf., men åpenbart alle predikatene i rekken:

U;0, S;0, U;1, S;1,...., U;(n–1),S;(n–1).

Man må følgelig ha at Pred;1(π:0(L))Ω C = ø. Er LêI;c skulle det også være klart at:

Fml(π;n(L)) SInkl Fml(π;(n+1)(L)) Inkl Fml(L) for alle n≥0 og dessuten at Fml(L) = UN/n,0,∞/(π;n(L)).

På samme måte som før bruker vi definisjonene:

Tr;L(R) = g(R) "Mg(F: FêCFml(L(R) & R(F) = 1)
X;(R,L) = g(R)"CFml(L(R))

forutsatt selvfølgelig at RêMod;(I;0)(L) og LêI.

§2.1 Systemet I:0Sn∞

La LêI;c. Vi betegner klassen av alle de modellene RêSem;(I;0)(L) som tilfredstiller kravene K1 – K6 nedenfor med "Sn∞Sem;(I;0)(L)":

K1 R(S;n)Ω G(R)"X;(R,π;n(L)) = G(R)"Tr;(π;n(L))(R) (n≥0)
K2 R(U;n) Ω G(R)"X;(R,L) = G(R)"X;(R,π;n(L)) (n≥0)
K3 R(S;n) Inkl R(S;(n+1)) Inkl R(U) (n≥0)
K4 R(U;n) Inkl R(U;(n+1))
K5 R(U;n) Inkl R(U)
K6 G(R)"(*f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;m))Ω R(U;r) Inkl R(S;r) om r≥0,
x;1,...,x;m,yê|R| og <m,n>êh

I tillegg krever vi at £(R)êI;c og at g(R)(S;n) = S;n og g(R)(U;n) = U;n for alle n≥0. Dette avslutter definisjonen av modellklasse Sn∞Sem;(I;0)(L).

Vi kan nå definere logikken LG1 semantisk ved den følgende definisjon:

(1) LG1 = Mg(<L,Val;L(Sn∞Sem;(I;0)(L))> : LêI;c)

Vi er imidlertid også interessert i å gi en syntaktisk versjon av dette systemet.

Anta LêI;c. Med Sn∞-aksiomene i L, i symboler "Ax(Sn∞,L)", forstår vi alle instanser i L av de følgende skjemaer (n≥0):

A22n S;n(μ(F)) <–> F om FêFml(π;n(L))
A23n U;n(μ(F)) om FêFml(π;n(L))
A24n ¬U;n(μ(F)) om Fê(Fml(L) – Fml(π;n(L))
A25n (Ax)(S;n(x) –> (S;(n+1)(x) & U(x))
A26n (Ax)(U;n(x) –> U;(n+1)(x))
A27n (Ax)(U;n(x) –> U(x))
A28n t;<mq>(x;1,...,x;m,y) & U;n(y) –> S;n(y) forutsatt at <m,q>êh.

Med I;0Sn∞-aksiomene i L forstås Ax(Sn∞,L)UAx(I;0,L). Vi bruker uttrykket "Ax(I;0Sn∞,L)" for å betegne I;0Sn∞-aksiomene i L. Med Th(I;0Sn∞,L), I;0Sn∞-teoremene i L, forstår vi den minste formelmengden Δ Inkl Fml(L) som inneholder Ax(I;0Sn∞,L) og som dessuten er lukket under modus ponens og universell generalisering. Man kan nå definere logikken I;0Sn∞ ved å sette:

I;0Sn∞ = Mg(<L,Th(I;0Sn∞,L)>: LêI;c)

I;0Sn∞ er altså en logikk som her er spesifisert i rent syntaktiske termer. Alle de syntaktiske begrepene som vi innførte i forbindelse med systemet I;0 innføres på en helt tilsvarende måte i forbindelse med systemet I;0Sn∞.

Det skulle ikke være spesielt vanskelig å se at man må ha Ax(Sn∞,L) Inkl Val;L(Sn∞Sem;(I;0)(L) om LêI;c. Ved hjelp av dette kan man bevise:

Teorem 2.1.1 La T= ß(Δ, I;0Sn∞,L) være en I;0Sn∞-teori i L. Anta LêI;c. Anta RêSn∞Sem;(I;0)(L) og at R:= Δ. Da gjelder: R:= T.

Vi overlater beviset for denne satsen til leseren.

Teorem 2.1.2 I;0Sn∞ er konsistent, dvs. at for ethvert LêI;c har man:

Th(I;0Sn∞,L) SInkl Fml(L).

Bevis: Beviset består i å konstruere en modell R;∞ êSn∞Sem;(I;0)(L). Siden man har at Th(I;0Sn∞, L) Inkl Val;L(Sn∞Sem;(I;0)(L)) følger det at

Th(I;0Sn∞,L) Inkl Val;L({R;∞}). Men siden man åpenbart har at ¬((G&¬G)êVal;F({R;∞})) om GêFml(L) følger Teorem 2.1.2.

Vi konstruerer først induktivt en sekvens av modeller R;0,R;1,.....,R;n,... der R;nêSem;(I;0)(L) for n≥0.

(a) Konstruksjon av R;0. Vi definerer en modellstruktur:

m = <*,D,f,£,<*f*:<m,n>>/m,nêN/,G>

for L på den følgende måte: Vi lar D være mengden av de naturlige tallene. (Dette valget er som det etterhvert vil fremgå temmelig vilkårlig). Man la * være et eller annet objekt som ikke er med i D. Man kan f.eks. la *=<m,n> for noen naturlige tall m,n. La E være en mengde med konstanter som er likemektig med mengden av de naturlige tallene. Vi lar da f være en korrelasjon mellom D og C. Den eksakte naturen til E og f er likgyldig og vi gir derfor ikke noen eksakt definisjon av disse to størrelsene. Vi lar £ være L, men med konstantmengden erstattet med E. Vi forutsetter i det følgende for enkelhetens skyld at alle de språkene vi arbeider med er tellbare. Det følger at Cd(CFml(£)) = Aleph;0. De enkelte *f*;<m,n> fastsettes vilkårlig, men er <m,n>êh krever vi at *f*;<m,n>(x;1,...,x;m)=ø for alle x;1,...,x;mêD. Vi gjør oppmerksom på at man istedet kunne la *f*;<m,n>(x;1,...,x;m) være f.eks. Mg(Gv¬G: GêCFml(£)). Imidlertid er det til en hvis grad likgyldig hvilket valg man foretar her bare man er forsikret om at *f*;<m,n>(R;∞)(x;1,...,x;m) Inkl Tr;L(R;∞) om x;1,...,x;mê|R;∞| og <m,n>êh. Begge valgene er brukbare. Vi lar tilslutt G være en en-entydig avbildning av CFml(£) inn i D. Dermed er modellstrukturen m fiksert.

Vi definerer en L-morfi fra g fra CFml(L(D)) over i CFml(£) ved å la g(u) =u for alle ikke-logiske symboler u i L.

Tilslutt defineres en valuasjonsfunksjon ∏;0 assosiert med g og m på den følgende måte. Også her er det innen visse grenser likgyldig hvordan man definerer dene. Imidlertid må man sette:

∏;0(U;n) = G"Mg(F: FêCFml(π;n(£))) og ∏;0(c) = f;-1(g(c)) om c er en konstant i L. Ellers kan man la ∏;0(P) der P er et n-ært predikat (P≠U;m for alle m≥0). ∏;0(f) der f er et n-ært funksjonsymbol og ∏;0(s), der s er en singulær term i snever forstand være definert slik man ønsker. Selvfølgelig må man kreve at ∏;0(P) Inkl D^n om PêPred;n(L) osv. Vi kan så sette R;0 = <m,g,∏;0>. Dermed er R;0 fullstendig definert.

(b) Konstruksjon av R;(n+1) gitt R;n. Vi antar nå at

R;n= <m',g', ∏;n>êSem;(I;0)(L)

er gitt. Vi skal definere en modell R;(n+1) = <m",g", ∏;(n+1)>êSem;(I;0)(L). Dette gjøres ved at man setter m"=m' og g" = g'. Man setter så videre:

∏;(n+1)(u) = ∏;n(u) om u er et ikke-logisk symbol i L og dersom u = U;0, U;1, U;2, ..., U;n,... Videre lar vi:

(1) ∏;(n+1)(S;m) = ∏;n(S;m) om m<n

(2) ∏;(n+1)(S;n) = G(R)" Tr;(π;n(L))(R;n)

(2.1) ∏;(n+1)(S;m) være en vilkårlig delmengde av D om m>n.

Dermed er R;(n+1) fullstendig definert.

Vi bemerker at m(R;n) = m og at g(R;n) = g for alle nêN.

(c) Vi definerer så modellen R;∞ ved å sette at m(R;∞) = m, g(R;∞) = g. Videre setter vi ∏;(R;∞)(u) = ∏;0(u) om u er et ikke-logisk symbol i L eller om u er et av predikatene i rekken U;0, U;1, U;2,..... Tilslutt setter vi

∏;(R;∞)(S;n) = ∏;(n+1)(S;n) om n≥0.

Dermed er R;∞ fullstendig definert.

Det bør bemerkes at slik modellen R;∞ har blitt definert er det lett å se at |R;∞| = |R;n| = D for alle n≥0. Derfor har man

CFml(L(R;∞)) = CFml(L(R;n)) for alle n≥0.

På dette punkt ønsker vi først å vise:

(3) ∏;(R;∞)(S;n) = G"(g"Mg(F: FêCFml(π;n(L)(R;∞)) & R;∞(F)=1))

for alle n≥0. For dette formål er det tilstrekkelig å bevise:

(4) FêCFml(π;n(L)(R;∞)) –> R;∞(F)= R;n(F)
têCTerm(π;n(L)(R;∞)) –> R;∞(t)= R;n(t)

Dette bevises ved et enkelt induksjonsbevis på lengden av de velformede uttrykkene i π;n(L)(R;∞). I lys av (4) og definisjonen av R;∞ har man:

(5) R;∞(S;n) = ∏;(R;∞)(S;n) = ∏;(n+1)(S;n) =
G"(g"Mg(F: FêCFml(π;n(L)(R;0)) & R;n(F)=1)) =
G"(g"Mg(F: FêCFml(π;n(L)(R;0)) & R;∞(F)=1))

Dette innebærer at (3) holder siden π;n(L)(R;∞) = π;n(L)(R;0) siden |R;0|= D = |R;∞|.

Fra (5) ser man umiddelbart at R;∞ oppfyller kravet K1. At kravet K2 er oppfylt er evident utfra definisjonen av ;∞(U;n) for n≥0. Kravene K4 – K6 er også uproblematiske. Anta xêR;∞(S;n). I lys av (3) har man da at det finnes F,H slik at:

x= G(H) & H =g(F) & FêCFml(π;n(L)(R;∞)) & R;∞(F)=1. Men da har man også at FêCFml(π;(n+1)(L)(R;∞)) & R;∞(F)=1. Ved hjelp av (3) følger da:
xêR;∞(S;(n+1)). Dette viser at R;∞ også tilfredstiller kravet K3.

Dermed har vi godtgjort at R;∞êSn∞Sem;(I;0)(L). **Q.E.D.**

Vi skal bevise, for ethvert LêI;c, at I;0Sn∞ er sterkt komplett over L med hensyn på Sn∞Sem;(I;0)(L). Den første delen av denne påstanden, gyldighetsdelen, har allerede blitt bevist i og med Teorem 2.1.1. Fullstendighetsdelen av denne påstanden kan formuleres slik:

Teorem 2.1.3 La T' = ß(Δ',I;0Sn∞, L') være en konsistent I;0Sn∞-teori i L', der L'êI;c. Da finnes en R'êSn∞Sem;(I;0)(L') slik at R':= T'.

Fra Teorem 2.1.1 og Teorem 2.1.3 følger:

Korollar 2.1.4 I;0Sn∞ = LG1

Bevis for Teorem 2.1.3: Vi utvider først språket L' til et språk L';c ved å legge til nye spesielle konstanter. Dernest utvider vi Δ' til Δ" ved å legge til alle de spesielle aksiomene for de spesielle konstantene. Resultatet er en konsistent I;0Sn∞-teori i L';c, T" = ß(Δ",I;0Sn∞,L';c), som for det første er en Henki-teori og som for det andre er en konservativ utvidelse av T'. Vi utvider så T" til en komplett Henkin-teori T=ß(Δ,I;0Sn∞,L) der L = L';c og Δ" Inkl Δ. Dette gjøres ved hjelp av Lindenbaums metode. Det neste som så må gjøres er å konstruere en "kanonisk" modell R;T = <m;T,g;T,∏;T> der

m;T = <*;T,D;T, f;T,£;T,<*f*;T(<m,n>)>/m,nêN/, G;T>

og så modifisere denne til en bestemt modell R*. Dette skjer på nøyaktig samme måte som i våre tidligere fullstendighetsbevis.[5] Det eneste nye er at vi definerer:

(i) R*(U;n) = R;T(U;n) = Mg(∂([c]): T:– U;n(c)) for alle n≥0.
(ii) R*(S;n) = R;T(S;n) = Mg(∂([c]): T:– S;n(c)) for alle n≥0.

Som tidligere kan man så ved et induksjonsbevis på lengden av de velformede uttrykkene i L bevise:

(iii) R*(F)=1 <–> T:– F
(iv) R*(t) = ∂([c]) <–> T:– (t=c)

forutsatt at FêCFml(L) og têCTerm(L) og c er en konstant i L. Dette skjer i det vesentlige på samme måte som tidligere.

For å fullføre beviset for Teorem 2.1.3 gjenstår det bare å vise at R* tilfredstiller kravene K1 – K6. At kravene K3 – K5 er oppfylt av R* er evident i lys av den kjensgjerning at alle instanser av aksiomskjemaene A25n – A27n (n≥0) er med i T. Vi må imidlertid vise at R* oppfyller K1, K2 og K6. Dette gjøres under (A) – (C) nedenfor.

(A) Vi må vise at R* oppfyller kravet K1. (a) Anta

(0) xêR*(S;)Ω G(R*)"X;(R*,π;n(L)). Da har man at følgende tre ting holder for en eller annen konstant ci l:

(1) x= ∂([c])
(2) T:– S;n(c)
(3) ∂([c])êG(R*)"X;(R*,π;n(L))

Fra (3) følger at det finnes en formel H slik at:

(4) ∂([c]) = G(R*)(H) & HêX;(R*,π;n(L))

Fra den siste komponenten i (4) følger at HêCFml(L;T) og siden den første komponenten i (4) impliserer at ∂([c]) = (G;T U G+)(H) følger det at
∂([c]) = G;T(H) og derfor i lys av definisjonen av "G;T) at

(5) ∂([c]) = μ(H). Fra dette og (2) har man:

(6) T:– S;n(μ(F)). Siden HêX;(R*,π;n(L)) har man at det finnes en formel G slik at

(7) H= g(R*)(G) & GêCFml(π;n(L)(R*)). Dette innebærer at H er en substitusjonsinstans av G. Man må derfor harat HêFml(π;n(L)). Dette og (6) impliserer i lys av A22n at T :– H. I sin tur impliserer dette i lys av (iii) ovenfor at

(8) R*(H)=1

Men H var en substitusjonsinstans av G. Dette og (7) innebærer at g(R*)(H) = g(R*)(G). Dette og (8) impliserer R*(G)=1 som sammen med (7) gir en HêTr;(π;n(L)(R*). Dette, (4) og (1) gir en så xêG(R*)"Tr;(π;n(L))(R*) som er det vi ønsker. (b) Anta på den annen side:

(0) xêG(R*)"Tr;(π;n(L))(R*).

Da har ma umiddelbart i lys av definisjonen av "Tr;L(R)" og "X;(R,L)" at xêG(R*)"X;(R*, π;n(L)). Det eneste man derfor behøver å vise er at xêR*(S;n).
Fra (0) følger at det finnes en konstant c i L og en formel H der vi har:

(1) x= ∂([c]) og
(2) ∂([c]) = G*(H) & HêTr;(π;n(L))(R*).

---

[5] I denne forbindelse kan man se Rognes [1], Kapittel IV, §2.

Fra den siste komponenten i (2) følger det at HêCFml(£;T). Dette sammen med den første konjunkte i (2) og definisjonen av G(R*) gir en at ∂([c]) = G;T(H). Dette i sin tur impliserer:

(3) T :– (c = μ(H))

Siden HêTr;(π;n(L))(R*) må det finnes en G slik at:

(4) H=g(R*)(G) og

(5) R*(G) =1 & GêCFml(π;n(L)(R*))

Siden HêCFml(£;T) har man at g(R*)(H) =H. I lys av (4) følger da:

(6) g(R*)(H) = g(R*)(G). Dette og (5) impliserer :

(7) R*(H)=1

Fa (6) og (5) følger HêCFml(π:n(L)). Fra (7) og (iii) ovenfor har man dessuten T :– H. Men da må man i kraft av A22n ha at T:– S;n(μ(H)). I lys av (3) innebærer dette T:– S;n(c). Fra dette følger så xêR*(S;n) som er det vi ønsker.

(B) Det er nødvendig å vise at R* oppfyller kravet K2. (a) Anta xêR*(U;n)ΩG(R*)"X;(R*,L). Da finnes det en konstant c, og en formel F i L slik at følgende holder:

(0) x= ∂([c])

(1) ∂([c]) = G(R*)(F)

(2) FêX;(R*,L)

(3) T:– U;n(c)

Fra (2) følger FêCFm(£:T) som sammen med (1) og definisjonen av G* gir en T:– c = μ(F). Dette og (3) impliserer så:

(4) T :– U;n(μ(F)). Dette og A24n (n≥0) impliserer at FêFml(π;n(L)). Siden g(R*)(F) = F (fordi FêCFml(£;T)) har man at FêX;(R*,π;n(L)). Dette, (0) og (1) impliserer xêG(R*)"X;(R*,π;n(L)) som er det vi ønsker.

(b) Anta på den annen side xêG(R*)"X;(R*,π;n(L)). Da har man

(5) x=∂([c]),

(6) ∂([c]) = G(R*)(H) og

(7) HêX;(R*,π;n(L)) for en eller annen konstant c og en eller annen formel F. (7) impliserer at HêCFml(£;T) som sammen med (6) og definisjonen av G(R*) impliserer:

(8) T:– (c=μ(H)). Men (7) impliserer også HêFml(π;n(L)) og derfor har man i lys av A23n (n≥0) at T:– U;n(μ(H)). Dette og (8) gir en T:– U(c) og følgelig at xêR*(U;n). Men siden xêG(R*)"X;(R*,π;n(L)) Inkl G(R*)"X;(R*,L) må man ha at xêR*(U;n)Ω G(R*)"X;(R*,L).

(C) Det gjenstår bare å vise at R* oppfyller kravet K6. Anta

(0) yêG(R*)"*f*;<m,q>(R*)(x;1,...,x;m) der <m,q> er indeksen til en streng intensjonal operator. Da finnes det konstanter c, c;1,...,c;m og en formel H der:

(1) y= ∂([c]) & x;i = ∂([c;i]) for i=1,...,m

(2) ∂([c]) = G*(H)

(3) Hê*f**;<m,q>(∂([c;1]),....,∂([c;m]))

Vi skiller mellom to tilfeller:

Tilfelle (i): Hê*f*;T(<m,q>)(∂([c;1]),....,∂([c;m])). Da har man i lys av definisjonen av *f*;T at

(3.1) T;<m,q>(c;1,...,c;m,H). Videre følger fra (2) T:– (c= μ(H)). Dette og (3.1) impliserer:

(4) T:– t;<m,q>(c;1,...,c;m,c). Antar man nå yêR*(U;n) følger T:– U;n(c) som sammen med (4) og A28n impliserer T:– S;n(c). Dette gir oss det ønskede resultat: yêR*(S;n).

Tilfelle (ii): HêZ;<m,q>(c;1,...,c;m). I lys av definisjonen av "Z;<m,q>" finnes det da en konstant c' slik at:

(5) Hê(G+);-1"({∂([c']}) & T :– t;<m,n>(c;1,...,c;m,c')

Fra (5) og (2) har man, i lys av definisjonen av G* og G+, at ∂([c]) = ∂([c']).
Herav følger så: T:– (c=c'). Dette og (5) gir en:

(6) T :– t;<m,n>(c;1,...,c;m,c)

Antar man nå yêR*(U;n) følger T:– U;n(c). Fra dette, (6) og A28n (n≥0) kan man så slutte T:– S;n(c). Men herav har man så yêR*(S;n).

Vi har nå vist at R* tilfredstiller kravne K1 – K6. Man kan nå vise R*|L' er en modell for T' på samme måte som tidligere. Man ser også lett at R*|L' oppfyller kravene K1 – K6. Man har derfor R*|L' êSN∞Sem;(I;0)(L'). Dette avslutter beviset for Teorem 2.1.3. **Q.E.D.**

§3 I:0Sn∞ er en konservativ av I:0|E

I denne paragrafen skal vi vise et viktig resultat vedrørende forholdet mellom systemet I;0Sn∞ og systemet I;0. La X Inkl I. Vi skal da bruke "X|L" som forkortelse for "Mg(<L, Th(I;0,L)>: LêX)". I;0|X kan omtales som systemet I;0 med språkene begrenset til dem i mengden X. Vi definerer:

E = Mg(π;0(L): LêI;c)

Det resultatet vi skal bevise kan nå formuleres slik:

Teorem 3.1 I;0Sn∞ er en konservativ utvidelse av I;0|E, dvs. at man har for ethvert LêI;c at:

Th(I;0Sn∞,L) Ω Fml(π;0(L)) = Th(I;0,π;0(L))

Dette teoremet sier en at gitt et I;0Sn∞-bevis i L: F;1,....,F;n for en formel F:nêFml(π;0(L)) så finnes det et I;0-bevis i π;0(L), G;1,.....,G;k der G;k=F;n. Dette innebærer at om vi brukte noen uttrykk eller aksiomer som var karakteristiske for systemet I;0Sn∞ i det første beviset, f.eks. noen av predikatene U;0, S;0, U;1, S;1, ... eller noen av aksiomene A22n – A28n (n≥0) så var bruken av disse overflødige. Vi kunne ha gitt et bevis for F;n som ikke brukte noe av dette, men som tvertimot bare brukte uttrykk og aksiomer i I;0. Teoremet sier oss imidlertid bare at et slikt bevis. Det sier en intet om hvordan man skal finne det. Et mer konstruktivt bevis som ga en mer informasjon om dette siste ville derfor være av interesse. Desverre har vi ikke greid å formulere noe argument av denne typen for Teorem 3.1.

Bevis for Teorem 3.1: Er LêI;c er det åpenbart at vi må ha

(1) Th(I;0,π;0(L)) Inkl Th(I;0Sn∞,L) Ω Fml(π;0(L))

Dette viser at inklusjonen mot venstre i Teorem 3.1 holder. For å vise inklusjonen den andre veien antar vi at L er et vilkårlig språk i I;c og dessuten at F;0 er en vilkårlig formel som er slik at:

(2) F;0ê Fml(π;0(L)) og

(3) F;0êTh(I;0Sn∞,L)

Det vil være tilstrekkelig å bevise:

(4) (AR)(RêSem;(I;0)(π;0(L)) –> R:= F;0)

Fra dette følger at F;0êTh(I;0,π;0(L)) ved hjelp av fullstendighetsteoremet for I;0. La derfor R være en vilkårlig modell i Sem;(I;0)(L). Vi ønsker å konstruere en modell R'êSn∞Sem;(I;0)(L) som er slik at

R':=F;0 <–> R;= F;0.

Ved hjelp av (3) og Teorem 2.1.1 følger da R:= F;0 som er det vi ønsker.

Konstruksjoen av R' gitt RêSem;(I;0)(π;0(L)) er noe komplisert og skjer i flere trinn. Det første trinnet er at vi betrakter R;-1. Dette er en første-ordens struktur for π;0(L);-1. Det neste trinnet er at vi ved hjelp av R;-1 skal konstruere en normal første-ordens struktur R* for L;-1. Denne vil være bestemt av F;0 og
R;-1. Vi betrakter så R*;-2 som er med i N0rm+;(I;0)(L). Vi setter B;0 = R*;-2 og konstruerer så en sekvens av modeller B;0,...,B;n,... der B;nêNorm+;(I;0)(L) for alle n≥0. (Konstruksjonen av denne sekvensen skjer omtrent på samme måte som kostuksjonen av sekvensen <R;>/nêN/ i beviset for Teorem 2.1.2.) Vi definerer dernest en modell B;∞. Denne modellen kan vi vise at er med i Sn∞Sem;(I;0)(L). Tilslutt settes R'= B;∞ og vi kan da vise at R':= F;0 <–> R:=F;0. La oss nå i detalj gjennomføre denne tankegangen.

C;F, der FêFml(π;0(L)), er definert nøyaktig som i Del I, §7. Vi bemerker at man har:

(5) C;(F;0) Inkl Spes(L;-1)

I tillegg bemerkes det at L;(g(R)) er det "subspråket" av modellstruktur-språket i R som er bildet av π;0(L)(R)[6]. Vi gjør også oppmerksom på at vi bruker de samme navnene i R og R;-1. La oss så starte konstruksjonen av R*:

Konstruksjon av R*: Vi setter |R*| = |R;-1|. Videre lar vi *(R*) = *(R;-1). Man setter R*(u) = R;-1(u) om u er et ikke-logisk symbol i π;0(L), dvs. om u enten er et ordinært predikat, funksjonsymbol, singulær term i snever forstand eller en konstant i π;0(L).

Nå kan vi anta at £;(L;-1,R*) er L;(g(R)) utvidet med predikatene S;n og U;n for ethvert n≥0. Videre kan vi anta at f;(L,-1,R*) er identisk med f(R) og at g;(L;-1,R*) er g(R) utvidet på en naturlig måte til L(R), dvs. at g;(L;-1,R*) er definert nøyaktig som g(R), men at vi i tillegg setter at

g;(L;-1,R*)(S;n) = S;n og g;(L;-1,R*)(U;n) = U;n for alle n≥0.

I det følgende vil vi bruke "g+" og "L+" istedet for de mer klumsete uttrykkene "g;(L;-1,R*)" og "£;(L;-1,R*)". Vi bemerker at:

(6) g+(F) = g(R)(F) for alle FêCFml(π;0(L)(R))

og at vi bruker de samme navnene i R og R*. Videre setter vi:

(7) R*(U) = R;-1(U) og

(8) R*(t;<m,n>) = R;-1(t;<m,n>) for alle m,nêN.

For å fullføre definisjonen av R* skal vi definere en korrelasjon V mellom Dom(V)= CFml(L+) og Rgn(V) = R;-1(U) =R(U).

Anta Qê C;(F;0) Ω Spes;1(π;0(L);-1). Da er Q av typen P«μ(G)» der Grad(«G») = p for noe p≥0. Vi definerer en relasjon W(Q) ved å sette:

<x,«g+(G)»[f(R)(y;1)....,f(R)(y;p)]>êW(Q) <–> <x,y;1,...,y;p>êR(P«μG»)

Siden GêFml(π;0(L)) har man at Dom(W(Q)) Inkl CFml(L;(g(R))

Vi setter:

(9) W;(F;0,R) = UN/ Qê C;(F;0) Ω Spes;1(π;0(L);-1)/(W(Q))

Nøyaktig på samme måte som i beviset for Teorem 7.1 i Del I ,§7 kan man bevise:

(10) W;(F;0,R) er en korrelasjon

(11) W;(F;0,R) Inkl G(R)Ω(|R| X X;(R,L))

Videre er det temmelig åpenbart at man må ha:

(12) Cd(CFml(L+) – Dom(W;(F;0,R))) = Aleph;0

siden vi bare arbeider med tellbare språk og modeller. Vi definerer så S;3R som i beviset for Teorem 7.1 i Del I og definerer:

(13) q;(F;0,R) = S;3R – Rgn(W;(F;0,R))

Q;(F;0,R) kan være en tellbart uendelig, endelig eller en tom mengde. Imidlertid må man ha:

---

[6] π;0(L)(R) er språket π;0(L) utvidet med navn på alle elementene i domenet til modellen R, ie. |R|. Istedenfor "π;0(L)(R)", kunne vi også ha skrevet "π;0(L)(|R|)".

(14) Cd(R(U) – (Rgn(W;(F;0,R) U q(F;0,R))) = Aleph;0

Det skulle ikke være vanskelig å se at man kan finne en HêX;(R,L) slik at om man setter

J;R = Mg(«H»[f(R)(y;1),...,f(R)(y;q)] v ¬«H»[f(R)(y;1),...,f(R)(y;q)]: y;1,...,y;qê|R|)

i det man antar at Grad(«H»)= q så er det slik at

(15) Dom(W;(F;0,R) Ω J;R = ø

Det er klart at J;R er tellbart uendelig. La F være en korrelasjon der man har at Rgn(F) =q(F;0,R) og der F;-1"(q;(F;0,R)) Inkl J(R) om q;(F;0,R) er endelig og der F;-1"(q;(F;0,R)) = J;R om q;(F;0,R) er tellbart uendelig.

Nå har man:

(16) W+;(F;0,R) = W;(F;0,R) U F er en korrelasjon

Dessuten har man:

(17) Cd(CFml(L+) – Dom(W+;(F;0,R))) = Aleph;0

(18) Cd(R(U) – Rgn(W+;(F;0,R))) = Aleph;0

Fra (17) og (18) følger at det finnes en korrelasjon E mellom CFml(L+) – Dom(W+;(F;0,R)) og R(U) – Rgn(W+;(F;0,R)). Vi definerer derfor tilslutt:

V = (W+;(F;0,R) U E)

Dette må være en korrelasjon med R(U) som verdiområde og CFml(L+) som domene.

Vi kan nå fullføre konstruksjonen av R* i det vi setter:

R*(S;n) = R(U) om n≥0

R*(U;n) = V" Mg(F: FêCFml(π;n(L+))) (n≥0)

R*(u) = R;-1(u) om uêSpes(L;-1)Ω(C;F;0)

Videre setter vi:

R*(P«μ(H)») = Mg(<x,y;1,...,y;p>: x= V(«g+(H)»[f(R)(y;1),....,f(R)(y;p)])) om P«μ(H)»ê(Spes;1(L;-1) – C;(F;0)). Her forusettes det at graden til «H» er p.

Dessuten setter vi:

R*(P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,H)») =

Mg(<x;1,...,x;m,y;1,...,y;p>:

V(«g+(H)»[f(R)(y;1),....,f(R)(y;p)]),x;1,...,x;m>êR;-1(t;<m,n>)) om P«T;<m,n>(x;1,...,x;m,H)») ê (Spes;2(L;-1) – C;(F;0))

Dermed har vi gitt en fullstendig definisjon av første-ordens strukture R* for L;-1.

Som i beviset for Teorem 7.1 i Del I, §7 kan man vise at R* er en normal første-ordens struktur for L;-1. Vi betrakter R*;-2. Som i beviset for Teorem 7.1 kan man også bevise:

(19) *f*;<m,n>(R*;-2)(x;1,...,x;m) Inkl Tr;L(R*;-2) om <m,n>êh og x;1,...,x;mê|R*;-2|.

Dessuten kan man ved et enkelt induksjonsbevis på lengden av velformede uttrykk bevise:

(20) Anta FêCFml(L;-1(|R;-1|)) og têCTerm(L;-1(|R;-1|)). Anta videre at Spes[F], Spes[t] Inkl C;(F;0). Da gjelder:

(i) R;-1(F) = R*(F)

(ii) R;-1(t) = R*(t)

I lys av (19) kan man slutte at R*;-2êNorm+;(I;0)(L).

Vi definerer nå induktivt en sekvens av modeller B;0,....,B;n,..... Dette skjer slik:

Man setter B;0 = R*;-2 og definerer B;(n+1) gitt B;n på nøyaktig samme måte som vi definerte R;(n+1) gitt R;n i beviset for Teorem 2.1.2 i §2. Vi definerer også B;∞ gitt sekvensen <B;n>/nêN/ på samme måte som vi definerte R;∞ gitt <R;n>/nêN/ i det nevte bevis. I lys av den måten B;∞ da har blitt konstruert på kan man slutte at B;∞ êSnSem;(I;0)(L). Imidlertid må man på dette punkt forsikre seg om en ting, nemlig at det følgende holder:

(21) $f;\langle m,n\rangle(B;\infty)(x;1,...,x;m)$ Inkl $Tr;L(B:\infty)$ om $\langle m,n\rangle$êh og $x;1,...,x;m$ê$|B;\infty|$

Nå kan man ved et temmelig likefrem induksjonsbevis, som overlates til leseren, godtgjøre at:

(22) FêCFml($\pi;0(L)(R)$) –> $R^*;-2(F) = B;\infty(F)$
têCTerm($\pi;0(L)(R)$) –> $R^*;-2(t) = B;\infty(t)$

Men fra (19) og (22) samt definisjonene av henholdsvis "Tr;L(B;∞)" og "Tr;L(R*;-2)" følger lett (21) siden

$f;\langle m,n\rangle(B;\infty)(x;1,...,x;m) = f;\langle m,n\rangle(R^*;-2)(x;1,...,x;m)$

(Jmf. definisjonen av B;∞)

Vi kan nå avslutte beviset for Teorem 3.1. Fra (2) og (3), Teorem 2.1.1 følger at $B;\infty := F;0$. Men dette og (22) impliserer at $R^*;-2 := F;0$. I lys av Lemma 4.3 i Del I, §4 følger da $R^* := X;w(F;0)$ der w er en variabel som ikke forekommer i F;0. men siden $Spes[X;w(F;0)]$ Inkl $C;(F;0)$ følger fra dette og (20) ovenfor at $R;-1 := X;w(F;0)$. Ved hjelp av Lemma 4.2 i Del I, §4 kan man så slutte at $R := F;0$. Dette er hva vi ønsker.

Dette avslutter beviset for Teorem 3.1. **Q.E.D.**

§4 Kommentarer til systemet I:0Sn∞.

I denne paragrafen skal vi kommentere enkelte trekk ved systemet I;0Sn∞.

(a) Som man har sett er skjemaet (1) $S;n(\mu(F) \leftrightarrow F$ gyldig om vi forutsetter at FêFml($\pi;n(L)$). Man kan spørre om hva som skjer med (1) om FêFml($\pi;m(L)$) der m>n. Svaret er at de fleste slike formler er konsistente, dvs. at de kommer ut som usanne i noen modeller og sanne i andre. En setning som for eksempel

(2) $(Ex)(S;n(\mu(\neg S;n(x))) \leftrightarrow \neg S;n(x))$

er sann i en modell R der man har $G(R)(\neg S;n(F(R)(y))$êR(S;n) og ¬(yêR(S;n)) for et eller annet yê|R|. Som leseren selv lett kan overbevise seg om er det en forholdsvis enkel sak å konnstruere en slik modell R der RêSn∞Sem;(I;0)(L). Det er også lett å konstruere en modell der (2) er usann.

Andre, litt eiendommelige, setninger av dette slag som er konsistente er for eksempel:

(3) $S;n(\mu(\neg S;m(x) \,\&\, S;m(x)))$ der $m \geq n$

Mer imidlertid i forbindelse med denne setningen at man har

$:= \neg S;(m+1)(\mu(S;m(x) \,\&\, \neg S;m(x)))$ for alle $m \geq 0$.

Dette er naturligvis slik det bør være. Intet paradoksalt ligger derfor i det faktum at negasjonen av (3) ikke er noe teorem i I;=Sn∞. Dette gjenspeiler bare det forhold at S;n er et adekvat sannhetspredikat utelukkende for de intensjonene som er av type <n. For intensjoner av type ≥n kan sannhet bare diskuteres på en adekvat måte ved hjelp av sannhetspredikater av høyere type. Disse forhold er også reflektert i vår semantikk ved at vi bare har krevd at

$G(R)"Tr;(\pi;n(L))(R) = (G(R)"(X;(R,\pi;n(L))) \Omega R(S;n)$

og ikke at:

$R(S,n) = G(R)"Tr;(\pi;n(L))(R)$

Dette siste kravet ville for eksempel hatt som konsekvens at enhver formel av typen ¬S;n(μ(F)) ville ha vært gyldig for alle FêFml(π;m(L)) der m≥n. Dette ville ha forhindre setninger av typen (3) fra å være konsistente.

Det er nå lett å se hvordan de uønskede egenskapene ved systemet I;0Sn blir forhindret i systemer av typen I;0Sn∞. La oss betrakte den problematiske setningen:

(4) (Ey)((Ax)(P(y,x) <–> x = μ((Aw)(P(y,w) –> ¬S(w)))))

(Se §1.3). Fra denne formelen følger:

(5) (Ax)(P(y,x) <–> x = μ((Aw)(P(y,w) –> ¬S(w))))

for noe individ y. I systemet I;0Sn utleder vi nå en motsigelse fra denne setningen på den følgende måte: Anta S(μ((Aw)(P(y,w) –> ¬S(w)))). Da har man ved hjelp av A1' (Se §1.2) at (Aw)(P(y,w) –> ¬S(w)). Men da følger ved hjelp av (5) at:

¬S(μ((Aw)(P(y,w) –> ¬S(w))))

Har man på den annen side at ¬S(μ((Aw)(P(y,w) –> ¬S(w)))) må det (i lys av A1') finnes et eller annet w slik at P(y,w)& S(w). Men dette og (5) impliserer:

S(μ((Aw)(P(y,w) –> ¬S(w))))

man har altså at μ((Aw)(P(y,w) –> ¬S(w)))) er en sann intensjon hvis og bare hvis den er usann.

Siden man i systemet I;0Sn∞ har lagt visse restriksjoner på A1' og, som man ser, erstattet dette aksiomskjemaet med A22n for alle n≥0, kan man ikke lenger slutte (Aw)(P(y,w) –> ¬S(w)) fra S(μ((Aw)(P(y,w) –> ¬S(w)))) i det vi nå forutsetter at S står for, la oss si, S;0. Dette går ikke fordi (Aw)(P(y,w) –> ¬S(w)) ikke er med i Fml(π;0(L)). Anta man i stedet for dette:

(6) S;n(μ((Aw)(P(y,w) –> ¬S(w)))) for noe n>0 kan man utlede (Aw)(P(y,w) –> ¬S(w)) i lys av A22n og herav ved hjelp av (5) at ¬S(μ((Aw)(P(y,w) –> ¬S(w)))). Men dette leder ikke til noen motsigelse og er heller ikke uforenelig med (6). Antar man at negasjonen av (6) holder er man heller ikke i stand til å utlede noen motsigelse. Vanskelighetene som det ble pekt på i forbindelse med systemet I;0Sn oppstår følgelig ikke i I;0Sn∞ fordi man i denne kalkylen ikke har aksiomskjemaet A1', men har erstattet det med A22n for n≥0.

(b) Anta LêI;c. Vi skal definere en mengde med modeller Sn;2∞Sem;(I;0)(L) for L som i en viss forstand er mer naturlig å betrakte en Sn∞Sem;(I;0)(L). Denne nye mengden av modeller avgrenses ved den følgende definisjon:

Man har at RêSn;2∞Sem;(I;0)(L) hvis og bare hvis man har at R oppfyller de følgende krav:

(a) RêSem;(I;0)(L)
(b) £(R) êI;c
(c) g(R)(S;n) = S;n og g(R)(U;n) = U;n for alle n≥0
(d) R oppfyller kravene K1 og K3 i §2.1 samt de følgende to krav:

K7 G(R)"*f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;m) Ω G(R)"CFml(π;r(£(R)) Inkl R(S;r)
forutsatt at <m,n>êh, x;1,...,x;mê|R| og r≥0.

K8 R(U;n) = G(R)"CFml(π;n(£(R)) (n≥0)

Dermed er modellklassen Sn;2§Sem;(I;0)(L) definert for alle LêI;c.

Det skulle ikke være vanskelig å verifisere at kravet K8 impliserer kravene K2,K4 og K5 gitt at RêSem;(I;0)(L). Heller ikke er det forbundet med noen vanskeligheter å godtgjøre at kravet K6 er implisert av konjunksjonen av K7 og K8. Man må derfor ha:

(1) Sn;2∞Sem;(I;0)(L) Inkl Sn∞Sem;(I;0)(L)

I lys av (1) følger umiddelbart fra Teorem 2.1.1 i §2:

Teorem 4.1 La T= ß(Δ, I;0Sn∞,L) være en I;0Sn∞-teori i L. Anta LêI;c. Anta RêSn;2∞Sem;(I;0)(L) og at R:= Δ. Da gjelder: R:= T.

Studerer man beviset for Teorem 2.1.2 i §2.1 nøyere er det ikke vanskelig å å oppdage at den modellen R;∞ som vi konstruerer der er med i modellklassen Sn;2∞Sem;(I;0)(L). Vi har derfor:

Teorem 4.2 Sn;2∞Sem;(I;0)(L)≠ø

Hvordan er det nå med kompletthet? Er systemet I;0Sn∞ sterkt komplett over L med hensyn på modellklassen Sn;2∞Sem;(I;0)(L)? Dette spørsmålet må faktisk besvares benektende:

Teorem 4.3 For ethvert LêI;c der Const(L)≠ø har man at I;0Sn∞ ikke er sterkt komplett med hensyn på Sn;2∞Sem;(I;0)(L). Med andre ord: For ethvert LêI;c der Const(L)≠ø finnes en konsistent I;0Sn∞-teori i L, T =ß(Δ,I;0Sn∞,L) slik at
(AR)(RêSn;2∞Sem;(I;0)(L) –> ¬(R:= T)).

Bevis: Anta LêI;c og at cêConst(L). Definer Δ ved:
Δ = {U(c)} U Mg(¬U;n(c) : nêN} Sett T = ß(Δ,I;0Sn∞,L).
Anta nå for reduktio ad absurdum at (1) RêSn;2∞Sem;(I;0)(L) og (2) R:=T.
Fra (2) følger R:=Δ og derfor at R:= U(c). Dette impliserer
R(c)êR(U) = G(R)"CFml(£(R))
Det må derfor finnes en HêCFml(£(R)) slik at
(3) R(c) = G(R)(H).
Men HêCFml(π;n(£(R)) for noe nêN og derfor har man i lys av (3) at
R(c)êR(U;n). Dette impliserer at R(U;n(c))=1. Men da kan man ikke ha R := Δ fordi dette innebærer at R(¬U;n(c))=1 for alle nêN. (1) og (2) impliserer altså en motsigelse. At teoien T er konsistent vises lettest ved å vise at enhver endelig delav den er konsistent. Dette må åpenbart være tilfelle. **Q.E.D.**

Selvom I;0Sn∞ ikke kan være sterkt komplett over L med hensyn på modellklassen Sn;2∞Sem;(I;0)(L) for LêI;c og der Const(L)≠ø, er det nærliggende å tro at I;0Sn∞ er svakt komplett over L med hensyn på Sn;2∞Sem;(I;0)(L) om LêI;c. Det virker heller ikke uberettiget å tro at dette kan bevises ved hjelp av den "første-ordens korrelat"-teknikken som vi tidligere ha brukt. Imidlertid skal vi ikke gå nøyere inn på dette spørsmålet her. Vi skal heller ikke gå nærmere inn på spørsmålet om I;0Sn∞ er sterkt eller svakt komplett med hensyn på en rekke delmengder av Sn;2∞Sem;(I;0)(L) som det kunne være naturlig å betrakte.
Man kunne for eksempel spørre om dette systemet er komplett med hensyn på klassen av alle de modeller R for L der RêSn∞Sem;(I;0)(L) og hvor G(R) er en korrelasjon. Alle disse spørsmålene skal vi imidlertid la ligge. Istedenfor dette skal vi innskrenke oss til å beskrive noen systemer som er beslektet med I;0Sn∞. Dette vil bli gjort i den neste paragrafen.

§5 Systemer som er beslektet med I:0Sn∞.

(a) *Systemet I;0*Sn∞.* Systemet I;0*Sn∞ har som aksiomskjemaer A1 – A20 med det forbehold at vi innskrenker A16 til bare å gjelde om <m,n> ikke er med i h. Videre har I;0*Sn∞ også skjemaene A21 og A22n – A27n (n≥0) som aksiomskjemaer. Slutningsregler i dette systemet er bare modus ponens og universell generalisering.

Er LêI definerer vi Sem;(I;0*)(L) på samme måte som i Del I. Anta LêI;c. Vi kaller klassen av de RêSem;(I;0*)(L) som tilfredstiller kravene K1 – K5 i §2.1 for Sn∞Sem;(I;0*)(L). Klassen av de RêSem;(I;0*)(L) som tilfredstiller kravene K1, K3 og K8 kaller vi for Sn;2∞Sem;(I;0*)(L).

Man har åpenbart: Sn;2∞Sem;(I;0*)(L) Inkl Sn∞Sem;(I;0*)(L)
Legger man til A28n (n≥0) til I;0*Sn∞ får man et system som er ekvivalent medI I;0Sn∞ siden:

T;<m,n>(x;1,...,x;m,F) <–> t;<m,n>(x;1,...,x;m,μ(F))
ikke er noe teorem i I;0*Sn∞ om <m,n>êh.

Man har:

Teorem 5.1 La T= ß(Δ, I;0*Sn∞,L) være en I;0*Sn∞-teori i L. Anta LêI;c. Anta RêSn;2∞Sem;(I;0*)(L) Inkl Sn∞Sem;(I;0*)(L) og at R:= Δ. Da gjelder: R:= T.

Siden Th(I;0*Sn∞, L) Inkl Th(I;0Sn∞,L) har man:

Teorem 5.2 I;0*Sn∞ er konsistent, dvs. at for ethvert LêI;c har man:
Th(I;0*Sn∞,L) SInkl Fml(L).

Vi kan også uten spesielle vanskeligheter bevise det følgende fullstendighets-resultat.

Teorem 5.3 La T' = ß(Δ',I;0*Sn∞, L') være en konsistent I;0*Sn∞-teori i L', der L'êI;c. Da finnes en R'êSn∞Sem;(I;0*)(L') slik at R':= T'.

Tilslutt nevner vi at man ved et argument som i mange henseende er helt analogt med det vi ga til fordel for Teorem 3.1 også kan bevise:

Teorem 5.4 I;0*Sn∞ er en konservativ utvidelse av I;0*, dvs. at man har for ethvert LêI;c at:

Th(I;0*Sn∞,L) Ω Fml(π;0(L)) = Th(I;0*,π;0(L))

(b) *Systemet I;0–Sn∞.* Aksiomskjemaer i dette systemet er A1 – A17, A20 samt A22n – A28n for alle n≥0. De eneste slutningsreglene er modus ponens og universell generalisering.

Anta nå LêI;c. Vi kaller mngden av alle de RêMod;(I;0)(L) som tilfredstiller kravene K1 – K6 og dessuten ravene K9 og K10 nedenfor for Sn∞Mod;(I;0–)(L). Videre kaller vi mengden av de RêMod;(I;0–)(L) som tilfredstiller kravene K1, K3, K7 og K8 og dessuten kravene K9 og K10 nedenfor for Sn;2∞Mod;(I;0–)(L).

K9 F,GêX;(R,π;n(L)) & G(R)(F)=G(R)(G) &
GêTr;(π;n(L))(R). –> FêTr;(π;n(L))(R)
K10 G(R)(F) = G(R)(G) & GêX;(R,π;n(L)). –> FêX;(R,π;n(L)).

Det skulle ikke være så vanskelig å se at:

Sn;2∞Mod;(I;0–)(L) Inkl Sn;2∞Mod;(I;0–)(L)

I forbindelse med kalkylen I;0–Sn∞ bemerker vi at Teorem 5.1 – Teorem 5.4 fremdeles holder om vi erstatter alle forekomster av "I;0*Sn∞" med "I;0–Sn∞", erstatter alle forekomster av "Sn∞Sem;(I;0*)(L)" og "Sn;2∞Sem;(I;0)(L)" med henholdsvis "Sn;2∞Mod;(I;0–)(L)" og " Sn;2∞Mod;(I;0–)(L)" og erstatter alle forekomster av "I;0*" med "I;0–".

(c) Systemet I;0*–Sn∞. Akiomskjemaer i dette systemet er de samme som i sytemet I;0*Sn∞, unntatt ved at vi har sløyfet aksiomskjemaene A18 og A19. Slutningsreglene i systemet er bare modus ponens og universell generalisering.

Anta LêI;c. Vi kaller mengden av alle de RêMod;(I;0*–) som oppfyller kravene K1 – K5, K9 og K10 for Sn∞Mod;(I;0*–)(L). Klassen av alle de RêMod;(I;0*–)(L) som oppfyller kravene K1, K3, K8, K9 og K10 for Sn;2∞Mod;(I;0*–)(L). På samme måte som tidligere kan man innse:

Sn;2∞Mod;(I;0*–)(L) Inkl Sn∞Mod;(I;0*–)(L)

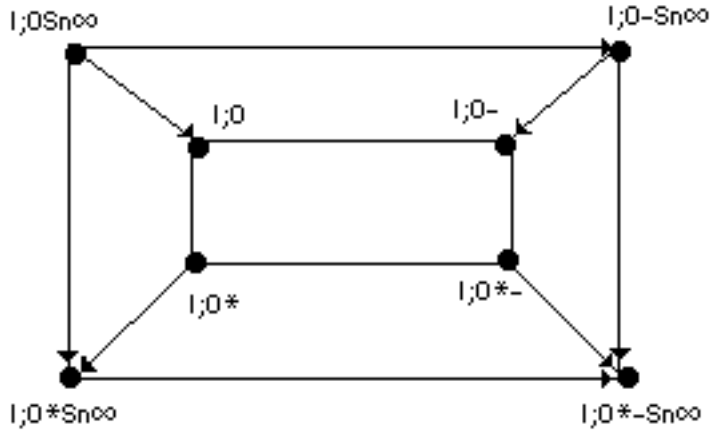
I forbindelse med kalkylen I;0*–Sn∞ bemerker vi at Teorem 5.1 – Teorem 5.4 fremdeles holder om vi erstatter alle forekomster av "I;0*Sn∞" med "I;0*–Sn∞", erstatter alle forekomster av "Sn∞Sem;(I;0*)(L)" og "Sn;2∞Sem;(I;0)(L)" med henholdsvis "Sn;2∞Mod;(I;0*–)(L)" og " Sn;2∞Mod;(I;0*–)(L)" og erstatter alle forekomster av "I;0*" med "I;0*–". Vi skal imidlertid ikke gi noe detaljert bevis for dette her.

Tilslutt nevner vi at man har:

Teorem 5.5 For ethvert LêI;c der Const(L)≠ø finnes det en I;0*Sn∞ (I;0–Sn∞. I;0*–Sn∞) -teori i L som er konsistent, men som ikke har noen modell i Sn;2∞Sem;(I;0*)(L) (Sn;2∞Mod;(I;0–)(L), Sn;2∞Mod;(I;0*–)(L)).

Beviset for denne påstanden er helt analogt med beviset for Teorem 4.3 i §4.

Inklusjonsforholdene mellom de systemene som vi har nevnt kan illustreres ved hjelp av den følgende figur:



Til tross for at Teorem 5,5 viser at vi ikke kan ha noe håp om å vise at I;0*Sn∞ (I;0–Sn∞. I;0*–Sn∞) er sterkt komplett med hensyn på Sn;2∞Sem;(I;0*)(L) (Sn;2∞Mod;(I;0–)(L), Sn;2∞Mod;(I;0*–)(L)) utelukker ikke dette at man kan vise et svakt fullstendighetsteorem for disse systemene. Siden situasjonen her i det vesentlige synes å være den samme som i §4 virker det ikke uberettiget å tro at noe slikt er mulig. Imidlertid skal vi ikke gå nøyere inn på dette her. Vi benytter i stedet anledningen til som en passende avslutning - å minne leseren om at langt fra alle de problemene man kan stille i forbindelse med de kalkylene om har blitt undersøkt og beskrevet i dette arbeidet kan ansees for å være løst.

Referanser

Referanser

Rognes [1] Rognes, Morten. *Undersøkelser i intensjonal logikk.* Maskinskrevet manuskript, 1973.

Appendix I

Angående noen spørsmål som kan stilles i forbindelse med systemet I:0.

La oss anta at vi fjernet operatorene T:<m,n> (m,nêN) fra systemet I;0 og istedet innførte dem ved definisjon, dvs. ved å bruke "T;<m,n>(t;1,...,t;n,F)" om forkortelse for "t;<m,n>(t;1,...,t;m,μ(F)". Det nye systemet kan vi kalle I;0r.

Systemene I;0r og I;0 er ikke uten videre sammenlignbare siden de to systemene har forskjellig språk. Forsåvidt kunne man si at I;0 var "sterkere" enn I;0r ettersom (1) Th(I;0r, L') Inkl Th(I;0,L),hvor L' fremkommer ved å fjerne de diverse operatorene T;<m,n> fra L. Et mer interessant spørsmål er imidlertid om I;0 kan gis noe troverdig tolkning inn i I;0r, med andre ord om det finnes en rekursiv avbildning av de velformede uttrykkene i L inn i de velformede uttrykkene i L' som tilordner alle teoremene i I;0 teoremer i I;0r og som avbilder ikke-teoremer i I;0 på ikke-teoremer i I;0r. Var det mulig å finne en slik tolkning kunne man si at I;0 ikke var sterkere enn I;0r, men da selvfølgelig i en annen betydnig av "sterkere" enn den som ble brukt ovenfor. Det må medgis at vi ikke har greid å avgjøre dette spørsmålet. Det er derfor inntil videre gode grunner til å skille mellom systemet I;0r og systemet I;0.

Man kan gjøre seg liknende tanker ved kvantorene og de utsagnslogiske konnektivene. I I;0-språkene har vi f.eks. ikke inkludert "v" som et primitivt utsagnslogisk konnektiv. Men innfører vi det som et nytt primitivt konnektiv får vi strengt tatt et nytt system, la oss kalle det I;0v, som er uttrykkssterkere enn I;0 i den forstand at det neppe kan gis noen troverdig tolkning i I;0 slik dette systemet har blitt definert. Det skulle være klart at vi ikke for eksempel kan bruke en tolkning Z der Z(F) er resulatet av å erstatte alle delformler av typen "HvG" i F med "(¬H)–>G". I systemet I;0v vil formelen:

(1) $\mu(FvH) \neq \mu((\neg G)\text{–>}H)$

være et teorem, mens derimot bildet av denne formelen over Z er

(2) $\mu((\neg G)\text{–>}H) \neq \mu((\neg G)\text{–>}H)$

som selvfølgelig ikke er noe teorem i I;0v. Derfor kan man ikke ha:

(3) Z" Th(I;0v,L') Inkl Th(I;0,L)

der L' er språket L utvidet med konnektivet "v". Men vi må kreve at (3) holder om Z skal være en troverdig tolkning. I denne forbindelse kan det imidlertid påpekes at I;0 er en konservativ utvidelse av I;0r og at I;0v er en konservativ utvidelse av I;0v. Dette kan bevises ved å bruke den "første-ordens korrelat"-teknikken vi har brukt i Del I av dette arbeidet. Jeg tror at de problemene jeg har antydet her fortjener et nøyere studium. Problemer av denne typen kan forøvrig også formuleres ved systemet J;0 og beslektede systemer.